

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Analisi Matematica I – Prova scritta del 26.02.2018**Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2 + \pi\sqrt{n}}$	Convergente
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$	Convergente
c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 + 3n^2 - 50n + 1}{100n^4 - 30n^2 + 4n - 10}$	Divergente a $+\infty$

Esercizio 2. (5 punti) Calcolare i seguenti integrali. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_0^1 x \sin x \, dx =$	$\sin 1 - \cos 1$
--------------------------------	-------------------

b) $\int_0^1 \frac{2x}{1+2x} \, dx =$	$1 - \frac{1}{2} \log 3$
---------------------------------------	--------------------------

c) $\int_0^1 2x \log(2+x^2) \, dx =$	$3 \log 3 - 2 \log 2 - 1$
--------------------------------------	---------------------------

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare i seguenti limiti. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + \sin x - \cos x}{x} =$ 0

b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos x (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})} =$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\sin x) (e^x - 1)}{(\log(1 + x)) (1 - \cos x)} =$ 2

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x^x - 1)$.

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha > 0 : \text{la restrizione di } f \text{ a } [\alpha, +\infty) \text{ è iniettiva}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{e}$
b) Quanto vale $\sup_{x \in (0, +\infty)} f(x)$?	$\frac{\pi}{2}$
c) Quanto vale $\sup_{x \in (0, \frac{1}{2})} f(x)$?	0

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni

$$f(x) = e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right), \quad g(x) = 2(\cosh x - 1) \sinh x.$$

Domanda	Risposta
a) Qual è l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$?	3
b) Qual è l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$?	3
c) Quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$?	1/6

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sia $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x e^{-t/e} \cdot \log t \, dt.$$

(Le risposte devono essere chiare, concise e adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione.)

- a) Determinare se i due limiti $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ esistono e in caso affermativo dire se sono infiniti o finiti. Dedurre l'eventuale esistenza di asintoti di F .

$$\bullet \left| e^{-\frac{t}{e}} \log t \right| \leq |\log t| \quad \forall t \in (0, 1). \quad \bullet \left| e^{-\frac{t}{e}} \log t \right| \leq e^{-\frac{t}{e}}(t - 1) \quad \forall t \in (1, +\infty).$$

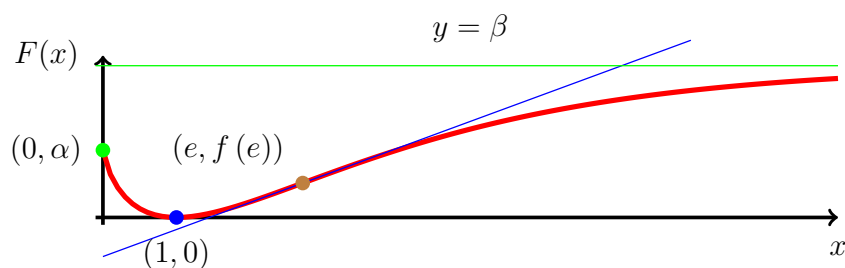
Poiché $|\log t|$ è integrabile in senso improprio su $(0, 1)$ e $e^{-\frac{t}{e}}(t - 1)$ è integrabile in senso improprio su $(1, +\infty)$, per il teorema del confronto, la funzione $e^{-\frac{t}{e}} \log t$ è integrabile in senso improprio su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ e quindi esistono finiti entrambi i limiti: $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, con $\alpha, \beta > 0$. La funzione integrale ha un asintoto orizzontale $y = \beta$ per $x \rightarrow +\infty$.

- b) Si determini la derivata prima di $F(x)$ e si discuta l'esistenza di eventuali punti di massimo e minimo relativi o assoluti.

$F'(x) = e^{-\frac{x}{e}} \log x > 0$ se e solo se $x > 1$. La funzione integrale è strettamente decrescente su $(0, 1)$ e strettamente crescente su $(1, +\infty)$. $x = 0$ è un punto di minimo assoluto in cui la funzione vale zero: $F(1) = 0$.

- c) Si determini la derivata seconda di $F(x)$ e si discuta la convessità/concavità e l'esistenza di eventuali punti di flesso. Rappresentare in modo qualitativo il grafico di F .

$F''(x) = e^{-\frac{x}{e}} \left(-\frac{1}{e} \log x + \frac{1}{x} \right) = \frac{e - x \log x}{e \cdot x} e^{-\frac{x}{e}}$. Occorre studiare il segno della funzione $h(x) = e - x \log x$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = e$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, $h'(x) = -(\log x + 1) > 0$ se e solo se $x < e^{-1}$. Poiché $h(e^{-1}) = e + \frac{1}{e} > 0$, esiste un unico punto $\bar{x} > e^{-1}$ in cui la funzione h si annulla. È facile osservare che $\bar{x} = e$, per cui F è convessa in $(0, e)$ e concava in $(e, +\infty)$.



- d) Si stabilisca se la funzione integrale data è uniformemente continua e/o Lipschitziana su $(0, +\infty)$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$, F' è limitata su $[2, +\infty)$, di conseguenza su tale intervallo F è Lipschitziana e quindi uniformemente continua. Poiché esiste il limite di F per $x \rightarrow 0^+$, F può essere estesa con continuità al punto $x = 0$. Tale estensione è continua sul compatto $[0, 1]$ e quindi uniformemente continua. F è quindi uniformemente continua. Non è però lipschitziana in quanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = -\infty$.