

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18.06.2018**Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Calcolare il valore dei seguenti integrali definiti (propri o impropri). [Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata]

a) $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx$ $\frac{5}{6} - \ln 2$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+2x^2} dx$ $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-2} dx$ $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3-2^{\frac{3}{2}})$

Esercizio 2. (5 punti) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right) =$ 0

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\tan(2x))^2}{2x^2} =$ 6

c) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\sin(x+2)}{4-x^2} =$ 1/4

Esercizio 3. (5 punti) Si discuta il carattere delle seguenti serie numeriche; nel caso di convergenza si precisi se si tratta di convergenza semplice/assoluta. (Le risposte devono adeguatamente motivate; risposte esatte non motivate non saranno considerate ai fini della valutazione).

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + \log n}$	converge assolutamente
--	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$	converge assolutamente
---	------------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$	oscilla
---	---------

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti limiti.

Limite	Valore
a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+2x)^{\frac{1}{x^2}} + \sin^2 x - 5}{2xe^{\frac{2}{x}} + e^x + 4}$	$\frac{1}{2}e^{-2}$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\pi}x^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \right) + \sqrt{x^4 + \frac{4}{\pi}x^3} - \frac{4\pi^2 x^4}{2\pi^2 x^2 + 1} \right]$	$-\frac{1}{\pi^2}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\arctan(x^2)} - \frac{1}{(\sin x)^2} \right]$	$-\frac{1}{3}$

Esercizio 5. (5 punti) Risolvere i seguenti problemi.

Domanda	Risposta
a) Determinare tutte le soluzioni complesse non nulle dell'equazione $ z ^2 - 3z^2 - i\bar{z} = 0$.	$\frac{i}{4}, \quad -\frac{\sqrt{5}}{6} - \frac{i}{6}$ $\frac{\sqrt{5}}{6} - \frac{i}{6}$
b) Determinare il numero di soluzioni complesse distinte dell'equazione $z^3 + 3i\bar{z} = 0$	5
c) Sia Z l'insieme delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema $\begin{cases} z - 1 - i = 1 \\ \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z. \end{cases}$ Quanto vale $\sup\{ z \mid z \in Z\}$?	$\sqrt{2} + 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise e adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione.)

a) Si dimostri che

$$\int_0^1 x^n (1-x)^k dx = \frac{n! k!}{(n+1+k)!} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Suggerimento: si ragioni per induzione su n .

Dimostriamo per induzione su n la proprietà

$$\int_0^1 x^n (1-x)^k dx = \frac{n! k!}{(n+1+k)!} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}. \quad (P(n))$$

$P(0)$ è vera (base di induzione); infatti

$$\int_0^1 x^0 (1-x)^k dx = \int_0^1 (1-x)^k dx = \left[-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{k+1} = \frac{0! k!}{(1+k)!}.$$

Dimostriamo ora che $P(n+1)$ è vera sotto l'ipotesi che valga $P(n)$ (passo induttivo). Integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^k dx &= \left[-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} x^{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} + (n+1) \int_0^1 \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} x^n dx \\ &= \frac{n+1}{k+1} \int_0^1 x^n (1-x)^{k+1} dx \\ &\stackrel{P(n)}{=} \frac{n+1}{k+1} \frac{n! (k+1)!}{(n+1+(k+1))!} = \frac{(n+1)! k!}{((n+1)+1+k)!}. \end{aligned}$$

b) Al variare di $k \in \mathbb{N}$, si consideri la successione

$$a_n = \int_0^1 x^n (1-x)^k dx.$$

Si discuta la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ al variare del parametro k .

Suggerimento: si dimostri, ragionando per induzione su $k \in \mathbb{N}$, che

$$\frac{n!}{(n+1+k)!} \leq \frac{1}{n^{k+1}} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Osserviamo che la serie in esame è a termini positivi.

Dimostriamo (*). Fissato $n \in \mathbb{N}$, per $k=0$ si ha che $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Dall'ipotesi induttiva che (*) sia vera per k , deduciamo che

$$\frac{n!}{(n+1+(k+1))!} = \frac{n!}{(n+2+k)(n+1+k)!} \leq \frac{1}{n+2+k} \frac{1}{n^{k+1}} \leq \frac{1}{n^{k+2}}.$$

Quindi per induzione concludiamo che vale (*). Da (*) deduciamo che

$$a_n = \frac{n! k!}{(n+1+k)!} \leq \frac{k!}{n^{k+1}}.$$

Per il criterio del confronto concludiamo che la serie converge per $k \geq 1$.

Per $k=0$ si ha che $a_n = \frac{1}{n+1}$ e quindi la serie $\sum a_n$ diverge.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, dove

$$b_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx.$$

Per il punto a) si ha che

$$b_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

In particolare $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n+1)!}{(2n+3)! (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1,$$

in virtù del criterio del rapporto concludiamo che la serie $\sum b_n$ converge.