

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Analisi Matematica I – Prova scritta del 09.07.2018

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare se le seguenti funzioni sono integrabili in senso improprio negli intervalli dati. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f_1(x) = \frac{1}{(\sin x) \sqrt{ \ln x }}, \quad \text{su } \left(0, \frac{1}{2}\right)$	Non integrabile
b) $f_2(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \quad \text{su } (1, +\infty)$	Integrabile
c) $f_3(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 50x + 1}{100x^4 + 30x^2 + 4x + 10}, \quad \text{su } (0, +\infty)$	Non integrabile

Esercizio 2. (5 punti) Calcolare i seguenti limiti. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin x + \sqrt{x} \log x}{x^3 + \sqrt{x^6 + \log x}} =$

0

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - 1) \log x}{1 - \cos \sqrt{x}} =$

$-\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x-1}{x+1} \right) =$

-2

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare le seguenti derivate. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) Se $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, allora $f'(2) = -\frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{5}$

b) Se $f(x) = \log(\sqrt{1-x^3} + 1)$, allora $f'(0) = 0$

c) Se $f(x) = \frac{e^{x-1}}{1+x^3}$, allora $f'(1) = -1/4$

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si considerino le due successioni

$$a_n = n^2 \left(\frac{n^{2\alpha} + 2n^\alpha + 2}{n^\alpha(1 + n^\alpha)} - \exp(n^{-\alpha}) \right) \log n, \quad b_n = n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right),$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?	$\alpha > \frac{3}{2}$
b) Per quali valori di α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge?	$\alpha < 2$
c) Per quali valori di α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge?	$\frac{3}{2} < \alpha < 2$

Esercizio 5. (5 punti) Sia $a_{k,n} = \frac{2kn}{n+1}$, $k, n \in \mathbb{N}$ e si considerino gli insiemi

$$A = \{a_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}\}; \quad B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a_{1,n}, a_{4,n}]; \quad C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_{1,n}, a_{4,n}].$$

Domanda	Risposta
a) Determinare l'insieme dei punti di accumulazione di A	$\{2k : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
b) Determinare l'insieme dei punti interni di B	$(2, 4)$
c) Determinare la frontiera di C	$\{1, 8\}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + \sqrt{tx}}.$$

(Le risposte devono essere chiare, concise e adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione.)

- Si discutano la continuità e la presenza di asintoti di f .
- Si discuta la derivabilità della funzione f , e si determini l'espressione di f' laddove esista.
- Si discuta l'esistenza di punti critici (stazionari) per la funzione f .
- Si stabilisca se la funzione f è Lipschitziana su $(0, +\infty)$.

Soluzioni. a) È possibile calcolare l'integrale per sostituzione, ottenendo

$$f(x) = 2 \frac{|x| - \log(|x| + 1)}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

La funzione f è banalmente continua in ogni punto $x \neq 0$. Poiché $f(0) = 0$ (per definizione di integrale definito su un intervallo degenere) e

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{|x| - \log(|x| + 1)}{x} = 0,$$

la funzione è continua anche nel punto $x = 0$. Per confronto di infiniti, $y = -2$ e $y = 2$ sono asintoti orizzontali a $-\infty$ e a $+\infty$, rispettivamente.

b) L'analisi della derivabilità richiede cura solo nel punto $x = 0$ (altrove si deriva con le note regole). Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{|x| - \log(|x| + 1)}{x^2} = 1,$$

la funzione è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 1$. Infine,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(|x|+1)\log(|x|+1)-2|x|}{x^2+|x|^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

c) Per $x > 0$, occorre risolvere l'equazione $(x+1)\log(x+1) = x$. Si vede, con uno studio della monotonia, che questa equazione non possiede soluzioni positive. Analogamente si procede per $x < 0$.

d) La derivata prima di f è limitata sugli intervalli limitati in quanto continua, ed inoltre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$. Da un noto criterio, segue che f è Lipschitziana.

