

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Analisi Matematica I – Prova scritta del 24.09.2018**Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si determinino la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

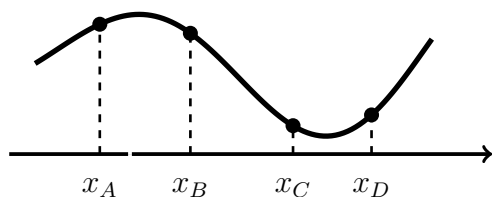
a) $z_1 = \frac{(\sqrt{3} + i)^6}{(1 + i)^{10}}$ $\text{Re}(z_1) = 0$ $\text{Im}(z_1) = 2$

b) z_2 è la radice quadrata di $2 - 2i\sqrt{3}$ con $\text{Re}(z_2) = \sqrt{3}$ $\text{Im}(z_2) = -1$
parte reale positiva

c) $z_3 = (i + 2)^4 - (i - 2)^4$ $\text{Re}(z_3) = 0$ $\text{Im}(z_3) = 48$

Esercizio 2. (5 punti) Motivare le risposte in modo *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.

- a) Si consideri una funzione f il cui grafico è rappresentato in figura. Supponendo che nei 4 punti x_A, x_B, x_C, x_D le sue derivate prima e seconda esistano e siano non nulle, si dica in quale dei 4 punti la sua derivata prima è **positiva** e la sua derivata seconda è **positiva**.



Il punto richiesto è x_D in quanto in un intorno di tale punto tale punto la funzione è crescente e convessa

- b) Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo, per $x \rightarrow +\infty$, del grafico della funzione $f(x) = \frac{3x^2+2}{3x+1} + x \sin \frac{1}{x}$.

$$y = x + \frac{2}{3}$$

- c) Determinare il più grande intervallo aperto in cui la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 5$ è convessa.

$$(1, +\infty)$$

Esercizio 3. (5 punti) Risolvere i seguenti problemi. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ 1

b) Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$ Converge

c) Discutere la convergenza, semplice ed assoluta, della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \cos(\pi n)}{n^3+3}$ Converge assolutamente

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Date le funzioni f e g definite da

$$f(x) = \frac{\frac{3^x-9}{x-2} - 9 \ln 3}{\arctan(x-2)}, \quad g(x) = \frac{x^{-1} + \ln(1 + 2 \exp(x^{-4}))}{3x^{-4} \cosh x + 4x^{-1} \arctan(x^{-4})},$$

e definiti L_1 e L_2 i limiti $L_1 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ e $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$:

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L_1	$\frac{9}{2} \ln^2 3$
b) Determinare il valore di L_2	$\frac{1}{3}$
c) Determinare l'ordine di infinitesimo di $g(x) - L_2$ per $x \rightarrow 0^+$.	2

Esercizio 5. (5 punti) Sia $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = \cos x\}$ e sia $a_n = \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si consideri l'insieme

$$E = \{z + a_n \mid z \in Z, n \geq 1\}.$$

Domanda	Risposta
a) Determinare l'insieme dei punti di accumulazione di E	$\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
b) Determinare l'insieme dei punti interni di E	$\emptyset$
c) Individuare un intervallo aperto contenuto in $\mathbb{R} \setminus E$	una possibile scelta è $(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2})$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione).

a) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\cos x} dx.$$

b) Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vale

$$\int \frac{1}{(\cos x)^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(\frac{\tan x}{(\cos x)^{n-2}} + (n-2) \int \frac{1}{(\cos x)^{n-2}} dx \right).$$

c) Si calcoli

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{(\cos x)^5} dx.$$

Soluzioni. a) Una possibilità è usare la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{2}{1-t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C = \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C \\ &= \log \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

b) Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\cos x)^n} dx &= \int \frac{1}{(\cos x)^2} \frac{1}{(\cos x)^{n-2}} dx = \int (\tan x)' \frac{1}{(\cos x)^{n-2}} dx \\ &= \frac{\tan x}{(\cos x)^{n-2}} - (n-2) \int \tan x \frac{\sin x}{(\cos x)^{n-1}} \\ &= \frac{\tan x}{(\cos x)^{n-2}} - (n-2) \int \frac{\sin^2 x}{(\cos x)^n} \\ &= \frac{\tan x}{(\cos x)^{n-2}} - (n-2) \int \frac{1 - \cos^2 x}{(\cos x)^n} \\ &= \frac{\tan x}{(\cos x)^{n-2}} - (n-2) \int \frac{1}{(\cos x)^n} + (n-2) \int \frac{1}{(\cos x)^{n-2}} \end{aligned}$$

da cui segue

$$(n-1) \int \frac{1}{(\cos x)^n} dx = \frac{\tan x}{(\cos x)^{n-2}} + (n-2) \int \frac{1}{(\cos x)^{n-2}}$$

e quindi l'identità voluta. In alternativa si può procedere derivando ambo i membri dell'identità data.

c) Dai punti a) e b) segue che una primitiva di $\frac{1}{(\cos x)^3}$ è

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tan x}{\cos x} + \log \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \right)$$

e quindi, usando nuovamente b), una primitiva di $\frac{1}{(\cos x)^5}$ è

$$\frac{1}{4} \frac{\tan x}{(\cos x)^3} + \frac{3 \tan x}{8 \cos x} + \frac{3}{8} \log \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right|.$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo concludiamo quindi che

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(\cos x)^5} dx &= \left[\frac{1}{4} \frac{\tan x}{(\cos x)^3} + \frac{3 \tan x}{8 \cos x} + \frac{3}{8} \log \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{7}{8} \sqrt{2} + \frac{3}{8} \log(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$