Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019

Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin(n\pi)$	converge assolutamente
---	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}$	converge semplicemente ma non assolutamente
--	---

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^2 + 2n - \sqrt{n} + 4}$	diverge
--	---------

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ 2

b) $\int_0^1 \arctan x dx$ $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

c) $\int_0^2 (x-1)\sqrt{x} dx$ $\frac{4}{15}\sqrt{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 1) e^{t^2} dt$ min. in $x = 1$,
max. in $x = -1$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1$,
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1+x) - e^{-2x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	6
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = 1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019

Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \sin(n\pi)$

converge assolutamente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 + 2 \log n}$

converge semplicemente ma non assolutamente

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n) + 1 + n^2 \sqrt{n}}{n^3 + 2n + \sqrt{n} - 3}$

diverge

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{\sqrt{3}}} \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$ $\frac{\pi}{3}$

b) $\int_1^e \ln^2 x dx$ $e - 2$

c) $\int_0^4 (x - 1) \sqrt{x} dx$ $\frac{112}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (4t^2 - 1) e^{4t^2} dt$ min. in $x = \frac{1}{2}$,
max. in $x = -\frac{1}{2}$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2$,
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-4x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^{-x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	8
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b + 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ converge assolutamente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \exp n}$ converge assolutamente

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^3 + 2n - \sqrt{n} + 4}$ converge assolutamente

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^e \frac{\log^5 x}{x} dx$

$$\frac{1}{6}$$

b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

$$e - 2$$

c) $\int_0^3 (x - 1) \sqrt{x} dx$

$$\frac{8}{5} \sqrt{3}$$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 4) e^{4t^2} dt$ min. in $x = 2,$
max. in $x = -2$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1,$
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 2x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	2
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = -1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$a = 1, b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$	converge assolutamente
--	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + 3 \exp n}$	converge assolutamente
--	------------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n} + 1 + \cos(n)}{2n + n^4 - \sqrt{n} + 4}$	converge assolutamente
---	------------------------

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{e-1}} \frac{1}{x(1+\log x)} dx$ 1

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$ $\pi^2 - 4$

c) $\int_0^1 (x-1)\sqrt{x} dx$ $-\frac{4}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 9) e^{-9t^2} dt$ min. in $x = 3$,
max. in $x = -3$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2$,
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $-\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	4
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b - 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$b = 1, a = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin(n\pi)$$

converge assolutamente

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}$$

converge semplicemente ma
non assolutamente

c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^2 + 2n - \sqrt{n} + 4}$$

diverge

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{e-1}} \frac{1}{x(1+\log x)} dx$ 1

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$ $\pi^2 - 4$

c) $\int_0^1 (x-1)\sqrt{x} dx$ $-\frac{4}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (4t^2 - 1) e^{4t^2} dt$ min. in $x = \frac{1}{2}$,
max. in $x = -\frac{1}{2}$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2$,
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-4x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x[1 + \ln(1+x) - e^{-2x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	6
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = -1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$a = 1, b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019

Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \sin(n\pi)$	converge assolutamente
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 + 2 \log n}$	converge semplicemente ma non assolutamente
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n) + 1 + n^2 \sqrt{n}}{n^3 + 2n + \sqrt{n} - 3}$	diverge

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^e \frac{\log^5 x}{x} dx$

$$\frac{1}{6}$$

b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

$$e - 2$$

c) $\int_0^3 (x - 1) \sqrt{x} dx$

$$\frac{8}{5} \sqrt{3}$$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 4) e^{4t^2} dt$ min. in $x = 2,$
max. in $x = -2$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1,$
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	4
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b - 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$b = 1, a = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$	converge assolutamente
--	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \exp n}$	converge assolutamente
--	------------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^3 + 2n - \sqrt{n} + 4}$	converge assolutamente
--	------------------------

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{\sqrt{3}}} \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$ $\frac{\pi}{3}$

b) $\int_1^e \ln^2 x dx$ $e - 2$

c) $\int_0^4 (x - 1) \sqrt{x} dx$ $\frac{112}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 9) e^{-9t^2} dt$ min. in $x = 3$,
max. in $x = -3$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2$,
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $-\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 2x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	2
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = 1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ converge assolutamente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + 3 \exp n}$ converge assolutamente

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n} + 1 + \cos(n)}{2n + n^4 - \sqrt{n} + 4}$ converge assolutamente

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ 2

b) $\int_0^1 \arctan x dx$ $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

c) $\int_0^2 (x-1)\sqrt{x} dx$ $\frac{4}{15}\sqrt{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 1) e^{t^2} dt$ min. in $x = 1$,
max. in $x = -1$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1$,
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^{-x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	8
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b + 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin(n\pi)$$

converge assolutamente

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}$$

converge semplicemente ma
non assolutamente

c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^2 + 2n - \sqrt{n} + 4}$$

diverge

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{e-1}} \frac{1}{x(1+\log x)} dx$ 1

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$ $\pi^2 - 4$

c) $\int_0^1 (x-1)\sqrt{x} dx$ $-\frac{4}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (4t^2 - 1) e^{4t^2} dt$ min. in $x = \frac{1}{2}$,
max. in $x = -\frac{1}{2}$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2$,
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-4x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x[1 + \ln(1+x) - e^{-2x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	6
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = -1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$a = 1, b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019

Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \sin(n\pi)$	converge assolutamente
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 + 2 \log n}$	converge semplicemente ma non assolutamente
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n) + 1 + n^2 \sqrt{n}}{n^3 + 2n + \sqrt{n} - 3}$	diverge

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^e \frac{\log^5 x}{x} dx$

$$\frac{1}{6}$$

b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

$$e - 2$$

c) $\int_0^3 (x - 1) \sqrt{x} dx$

$$\frac{8}{5} \sqrt{3}$$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 4) e^{4t^2} dt$ min. in $x = 2,$
max. in $x = -2$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1,$
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	4
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b - 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$b = 1, a = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$	converge assolutamente
--	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \exp n}$	converge assolutamente
--	------------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^3 + 2n - \sqrt{n} + 4}$	converge assolutamente
--	------------------------

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{\sqrt{3}}} \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$ $\frac{\pi}{3}$

b) $\int_1^e \ln^2 x dx$ $e - 2$

c) $\int_0^4 (x - 1) \sqrt{x} dx$ $\frac{112}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 9) e^{-9t^2} dt$ min. in $x = 3,$
max. in $x = -3$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2,$
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $-\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 2x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	2
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = 1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$	converge assolutamente
--	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + 3 \exp n}$	converge assolutamente
--	------------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n} + 1 + \cos(n)}{2n + n^4 - \sqrt{n} + 4}$	converge assolutamente
---	------------------------

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ 2

b) $\int_0^1 \arctan x dx$ $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

c) $\int_0^2 (x-1)\sqrt{x} dx$ $\frac{4}{15}\sqrt{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 1) e^{t^2} dt$ min. in $x = 1$,
max. in $x = -1$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1$,
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^{-x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	8
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b + 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019

Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin(n\pi)$

converge assolutamente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}$

converge semplicemente ma non assolutamente

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^2 + 2n - \sqrt{n} + 4}$

diverge

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{e-1}} \frac{1}{x(1+\log x)} dx$ 1

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$ $\pi^2 - 4$

c) $\int_0^1 (x-1)\sqrt{x} dx$ $-\frac{4}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (4t^2 - 1) e^{4t^2} dt$ min. in $x = \frac{1}{2}$,
max. in $x = -\frac{1}{2}$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2$,
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-4x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1+x) - e^{-2x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	6
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = -1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$a = 1, b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019

Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \sin(n\pi)$	converge assolutamente
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 + 2 \log n}$	converge semplicemente ma non assolutamente
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n) + 1 + n^2 \sqrt{n}}{n^3 + 2n + \sqrt{n} - 3}$	diverge

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^e \frac{\log^5 x}{x} dx$

$$\frac{1}{6}$$

b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

$$e - 2$$

c) $\int_0^3 (x - 1) \sqrt{x} dx$

$$\frac{8}{5} \sqrt{3}$$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 4) e^{4t^2} dt$ min. in $x = 2,$
max. in $x = -2$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1,$
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	4
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1 - \frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow -\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b - 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$?	$b = 1, a = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ converge assolutamente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \exp n}$ converge assolutamente

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^3 + 2n - \sqrt{n} + 4}$ converge assolutamente

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^{\sqrt{3}}} \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$ $\frac{\pi}{3}$

b) $\int_1^e \ln^2 x dx$ $e - 2$

c) $\int_0^4 (x - 1) \sqrt{x} dx$ $\frac{112}{15}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 9) e^{-9t^2} dt$ min. in $x = 3$,
max. in $x = -3$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 16}$ min. in $x = -2$,
max. in $x = -8$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$ min. in $x =$
 $-\frac{1}{3} \ln 2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 2x) - e^x]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	2
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-5

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = 1 - a, k = 1 - b$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Cognome: Nome: Matricola:

Desidero sostenere la prova orale il 13/02/2019 28/02/2019**Analisi Matematica I – prova parziale del 04/02/2019****Parte A**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$	converge assolutamente
--	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + 3 \exp n}$	converge assolutamente
--	------------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n} + 1 + \cos(n)}{2n + n^4 - \sqrt{n} + 4}$	converge assolutamente
---	------------------------

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguata-*
mente la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ 2

b) $\int_0^1 \arctan x dx$ $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

c) $\int_0^2 (x-1)\sqrt{x} dx$ $\frac{4}{15}\sqrt{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni. (Riportare lo svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (t^2 - 1) e^{t^2} dt$ min. in $x = 1$,
max. in $x = -1$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{x}{10}} \sqrt{x^2 + 9}$ min. in $x = -1$,
max. in $x = -9$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$ min. in $x = 0$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1 + 3x) - e^{-x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia n l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di L	8
b) Determinare il valore di n	1
c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$.	-10

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} + a + \frac{b}{x}.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di a risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?	-1
b) Se $f(x) = h + \frac{k}{x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow +\infty$, quanto valgono h e k ?	$h = a + 1, k = b + 1$
b) Per quali valori di a e b è convergente l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?	$a = b = -1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- Si calcolino i limiti all'infinito di f e si determinino eventuali asintoti.
- Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$.
- Si dimostri che, per ogni $m > 0$, esiste un punto $c > 0$ tale che $f''(c) = mc$.
- Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$ converge.

Soluzioni.

- La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si verifica facilmente che la funzione diverge a $+\infty$, e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La funzione non presenta asintoti.
- La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

- La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta $f''(0) = 3$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di $y = f''(x)$ e $y = mx$.

- Dato che $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$ per $x \rightarrow 0$ l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ in virtù del criterio del confronto asintotico.