

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

**Analisi Matematica I – Prova scritta del 04/02/2019****Parte A**

**Esercizio 1. (5 punti)** Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

|                                         |                        |
|-----------------------------------------|------------------------|
| a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin(n\pi)$ | converge assolutamente |
|-----------------------------------------|------------------------|

|                                                    |                                                |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log n}$ | converge semplicemente ma<br>non assolutamente |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------|

|                                                                                  |         |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------|
| c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^2 + 2n - \sqrt{n} + 4}$ | diverge |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------|

**Esercizio 2. (5 punti)** Determinare il valore dei seguenti integrali. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a)  $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log x)}{x} dx$

2

b)  $\int_0^1 \arctan x dx$

$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

c)  $\int_0^2 (x-1) \sqrt{x} dx$

$\frac{4}{15} \sqrt{2}$

**Esercizio 3. (5 punti)** Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso ed elencarne le soluzioni scritte in forma algebrica. (Riportare uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a)  $|z| = z + 1 - 2i$

$$\frac{3}{2} + 2i$$

b)  $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$

$$\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right), \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

c)  $z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

## Parte B

**Esercizio 4. (5 punti)** Dati la funzione

$$f(x) = \frac{x [1 + \ln(1+x) - e^{-2x}]}{1 - \cos x}, \text{ il limite } L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ e la funzione } g(x) = f(x) - L,$$

sia  $n$  l'ordine di infinitesimo di  $g(x)$  per  $x \rightarrow 0$ .

| Domanda                                                                         | Risposta |
|---------------------------------------------------------------------------------|----------|
| a) Determinare il valore di $L$                                                 | 6        |
| b) Determinare il valore di $n$                                                 | 1        |
| c) Determinare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n}$ . | -5       |

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

**Esercizio 5. (5 punti)** Si considerino le due successioni

$$a_n = \left[ 2 \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right) \right], \quad b_n = 3n^3 \left( \frac{1}{n+1} - \arctan \frac{1}{n+1} \right),$$

dove  $[\cdot]$  indica la parte intera. Si consideri l'insieme  $A_\alpha = \{a_n + \alpha b_n : n \in \mathbb{N}\}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

| Domanda                                                            | Risposta        |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------|
| a) Per quali valori di $\alpha$ l'insieme $A_\alpha$ è finito?     | $\alpha = 0$    |
| b) Per quali valori di $\alpha$ l'insieme $A_\alpha$ è numerabile? | $\alpha \neq 0$ |
| c) L'insieme dei punti di accumulazione di $A_1$ è                 | $\{-1, 1, 2\}$  |

## Parte C

**Esercizio 6. (8 punti)** (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione). Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( 2|x| + (|x| + 1) \log(|x| + 1) \right) \log(|x| + 1).$$

- a) Si calcolino i limiti all'infinito di  $f$  e si determinino eventuali asintoti.
- b) Si dimostri che la funzione è strettamente crescente sulla semiretta  $(0, +\infty)$ .
- c) Si dimostri che, per ogni  $m > 0$ , esiste un punto  $c > 0$  tale che  $f''(c) = mc$ .
- d) Per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'integrale improprio  $\int_{-1}^1 \frac{|x|^\alpha}{f(x)} dx$  converge.

*Soluzioni.*

- a) La funzione è pari, quindi è sufficiente considerarla sulla semiretta  $[0, +\infty)$ . Si verifica facilmente che la funzione diverge a  $+\infty$ , e che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . La funzione non presenta asintoti.
- b) La derivata è, dopo alcune semplificazioni algebriche,

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \log^2(x+1) + 2 \log(x+1), \quad x > 0.$$

Osserviamo che  $f'(x) > 0$  per ogni  $x > 0$ , dunque  $f$  è strettamente crescente in  $[0, +\infty)$ .

- c) La derivata seconda, ancora dopo alcune semplificazioni, è

$$f''(x) = \frac{2x + (x+1) \log(x+1) + 3}{(x+1)^2}.$$

Risulta  $f''(0) = 3$ , e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ . Per il teorema dei valori intermedi, esiste almeno una intersezione di ascissa positiva tra il grafico di  $y = f''(x)$  e  $y = mx$ .

- d) Dato che  $f(x) \sim \frac{3}{2}x^2$  per  $x \rightarrow 0$  l'integrale converge se e solo se  $\alpha > 1$  in virtù del criterio del confronto asintotico.

