

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
 È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 22/02/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$	converge assolutamente
---	------------------------

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cos^2 n}$	diverge
---	---------

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$	converge assolutamente
--	------------------------

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore dei seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$ $\log \frac{4}{3}$

b) $\int_1^{+\infty} x e^{-2x} dx$ $\frac{3}{4e^2}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ $\frac{2}{3}$

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare i seguenti limiti. (Riportare uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x^2 + 2x^4) - 1}{e^{x^4} - 1}$ -8

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{2x - 1} - \frac{x^3 + 2x}{2x^2 + 3} \right)$ $\frac{5}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\log(x^2 + 3) - \log(x^2 + 1)]$ 2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Definiamo $f: (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}.$$

Domanda	Risposta
a) Determinare il valore di $L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	1
b) Determinare l'ordine di infinitesimo di $f(x) - L$ per $x \rightarrow 0$.	1
c) Determinare il valore di $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$ centrato in $x = 0$.	1

Le risposte alle domande b) e c) verranno valutate solo in presenza di risposte corrette rispettivamente alle domande a) e b).

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < z\bar{z} < 25 \text{ e } \operatorname{Re}(z^2) > 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in A\}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : e^{2\pi z} = 1\}.$$

Domanda	Risposta
a) $\inf\{ z - w : z \in A, \operatorname{Re}(w) = 0\}$ vale	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\inf\{\operatorname{Im}(z) : z \in B \cap C\}$ vale	-2
c) $\sup\{\operatorname{Im}(z) : z \in B\}$ vale	$\sqrt{5}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) (Le risposte devono essere chiare, concise ed adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione).

- a) **(1 Punto)** Si determini il più grande intervallo E dei valori reali $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste in senso proprio o improprio il seguente integrale

$$F(x) = \int_1^x \log(\arctan t^3) dt.$$

- b) **(1 Punto)** Definita la funzione integrale $F : E \rightarrow \mathbb{R}$, si studi l'esistenza dei limiti di F agli estremi E .
- c) **(2 Punti)** Calcolare la derivata di F specificandone l'insieme di definizione e studiare la natura degli eventuali punti di non derivabilità (punti angolosi, tangente verticale,...). Determinare eventuali punti di massimo o minimo di F specificando se si tratta di estremanti relativi o assoluti.
- d) **(1 Punto)** Calcolare la derivata seconda, specificandone l'insieme di definizione, e studiare la convessità di F .
- c) **(3 Punti)** Stabilire se vi sono asintoti al grafico di F e tracciare tale grafico in modo qualitativo mettendo in evidenza il segno di F .

Soluzioni.

- a) La funzione $f(t) = \log(\arctan t^3)$ è definita e continua in $(0, +\infty)$. Occorre solo stabilire se f è integrabile in senso improprio in un intorno destro di $t = 0$. Poiché $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t^3}{t^3} = 1$, esiste $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tale che $\arctan t^3 > \frac{1}{2}t^3$ per ogni $t^3 \in (0, \delta)$, da cui $\log(\arctan t^3) > \log \frac{t^3}{2}$. Essendo, in tale intorno, il logaritmo negativo si ha $|\log(\arctan t^3)| \leq \left| \log \frac{t^3}{2} \right| \leq |3 \log t| + |\log 2|$ che è integrabile in senso improprio in un intorno destro di zero. Per i criteri del confronto e della convergenza assoluta, f è integrabile in senso improprio in un intorno destro di zero, quindi $E = [0, +\infty)$ (alternativamente si può anche dimostrare l'esistenza dell'integrale improprio integrando per parti).
- b) Poiché f è integrabile in un intorno destro di zero, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = \int_1^0 \log(\arctan t^3) dt = \alpha > 0,$$

Quando l'argomento è sufficientemente grande, l'arcotangente è maggiore di 1. Prendiamo, per esempio, $t^3 \geq \sqrt{3}$ da cui si ha $\arctan t^3 \geq \frac{\pi}{3} > 1$ da cui segue $f(t) \geq \log \frac{\pi}{3} > 0$, per ogni $t \geq \sqrt[3]{3}$. Da cui segue che f non è integrabile in senso improprio a $+\infty$ e inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

c) Poiché f è continua su $(0, +\infty)$ la funzione integrale è derivabile in tale intervallo e si ha $F'(x) = f(x) = \log(\arctan x^3)$ per $x > 0$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\arctan x^3) = -\infty$, in zero F non è derivabile e il suo grafico in tale punto ha una tangente verticale. $F'(x)$ è maggiore di zero se $x > \sqrt[3]{\tan 1}$ (osserviamo che $\frac{\pi}{4} < 1$ per cui $1 < \tan 1$). Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, $x = \sqrt[3]{\tan 1}$ è un punto di minimo assoluto con $F(\sqrt[3]{\tan 1}) < 0$ poiché $F(1) = 0$.

d) Calcolando la derivata seconda

$$F''(x) = f'(x) = \frac{1}{\arctan x^3} \cdot \frac{3x^2}{1+x^6} > 0, \text{ per ogni } x > 0,$$

si deduce che F è convessa in tutto il suo insieme di definizione.

e) Per i punti precedenti non vi possono essere asintoti verticali o orizzontali. Vi può essere però un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Usando De l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\arctan x^3)}{1} = \log \frac{\pi}{2}.$$

Quindi, ricordando la formula $\arctan t^3 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{t^3}$ per ogni $t \neq 0$ si ha

$$F(x) - x \log \frac{\pi}{2} = \int_1^x \log \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{t^3} \right] dt - \log \frac{\pi}{2}.$$

Poiché per $t \rightarrow +\infty$ si ha $g(t) = \log \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{t^3} \right] \sim -\frac{2}{\pi} \frac{1}{t^3}$ la funzione $g(t)$ è integrabile in senso improprio a $+\infty$, quindi esiste finito il limite

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[F(x) - x \log \frac{\pi}{2} \right]$$

Il grafico della funzione integrale ha un asintoto obliquo di equazione $y = x \log \frac{\pi}{2} + \beta$. La funzione integrale assume valori negativi in un intervallo $(1, \gamma)$ con $\gamma > \sqrt[3]{\tan 1}$.

