Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{8}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{5}$

c) $(1 - i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = -32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge a $\frac{1}{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{3}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{1+x^2}$

$$g(x) = e + ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (5 - \pi)(x + 1) - 3(x + 1)^2 + \frac{6 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	-2
b) $A \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{5}{2}$
c) $B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{12}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > \sqrt{2}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{3}{4} \pi i}$

$$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = 1$$

b) $\frac{4 + 2i + e^{2\pi i}}{2 + i}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{12}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{5}$$

c) $(1 + i)^{11}$

$$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = 32$$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \cos(t^2) dt$

non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

converge a $\frac{\pi}{2}$

c) $\int_1^{+\infty} te^{-t^2} dt$

converge a $\frac{1}{2e}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{2+x^2}$

$$g(x) = e^2 + e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = -x^3 + 3x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -2 - \pi(x+1) + 3(x+1)^2 + \frac{\pi^3-6}{6}(x+1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x+1)^5 + o((x+1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	-3
b) $A \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{2}$
c) $B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{17}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{5}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = -1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{3}{2} \pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{9}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{5}$

c) $(-1 - i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = -32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2 + \pi) dt$ non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{1-x^2}$

$$g(x) = e - ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = 2x^3 + x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (7 - \pi)(x + 1) - 6(x + 1)^2 + \frac{12 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	-4
b) $A \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{9}{2}$
c) $B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{22}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$ converge?	$\alpha > 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{7}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = -1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{1}{2} \pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{11}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{2}{5}$

c) $(-1 + i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = 32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_2^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{6}$

c) $\int_1^{+\infty} t e^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4e^2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $g(x) = e^{2-x^2}$

$$g(x) = e^2 - e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $h(x) = 3x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -5 + (11 - \pi)(x + 1) - 9(x + 1)^2 + \frac{18 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	-1
b) $A \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{3}{2}$
c) $B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{8}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{5}$

c) $(1 - i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = -32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_2^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{6}$

c) $\int_1^{+\infty} te^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4e^2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{2+x^2}$

$$g(x) = e^2 + e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = -x^3 + 3x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -2 - \pi(x+1) + 3(x+1)^2 + \frac{\pi^3-6}{6}(x+1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x+1)^5 + o((x+1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	-2
b) $A \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{5}{2}$
c) $B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{12}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$ converge?	$\alpha > 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{3}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = 1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{2\pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{12}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{5}$

c) $(1 + i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = 32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2 + \pi) dt$ non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{1-x^2}$

$$g(x) = e - ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = 2x^3 + x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (7 - \pi)(x + 1) - 6(x + 1)^2 + \frac{12 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	-1
b) $A \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{3}{2}$
c) $B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{5}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = -1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{3}{2} \pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{9}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{5}$

c) $(-1 - i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = -32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \cos(t^2) dt$

non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

converge a $\frac{\pi}{2}$

c) $\int_1^{+\infty} te^{-t^2} dt$

converge a $\frac{1}{2e}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $g(x) = e^{2-x^2}$

$$g(x) = e^2 - e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $h(x) = 3x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -5 + (11 - \pi)(x + 1) - 9(x + 1)^2 + \frac{18 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	-4
b) $A \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{9}{2}$
c) $B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{22}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > \sqrt{2}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{7}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = -1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{1}{2} \pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{11}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{2}{5}$

c) $(-1 + i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = 32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge a $\frac{1}{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{3}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{1+x^2}$

$$g(x) = e + ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (5 - \pi)(x + 1) - 3(x + 1)^2 + \frac{6 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	-3
b) $A \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{2}$
c) $B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{17}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \pi i}$

$$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 1$$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\pi i}}{2 + i}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{8}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{5}$$

c) $(1 - i)^{11}$

$$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = -32$$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_2^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{6}$

c) $\int_1^{+\infty} te^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4e^2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $g(x) = e^{2+x^2}$

$$g(x) = e^2 + e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $h(x) = -x^3 + 3x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -2 - \pi(x+1) + 3(x+1)^2 + \frac{\pi^3-6}{6}(x+1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x+1)^5 + o((x+1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	-2
b) $A \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{5}{2}$
c) $B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{12}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$ converge?	$\alpha > 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{3}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = 1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{2\pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{12}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{5}$

c) $(1 + i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = 32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2 + \pi) dt$ non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $g(x) = e^{1-x^2}$

$$g(x) = e - ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $h(x) = 2x^3 + x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (7 - \pi)(x + 1) - 6(x + 1)^2 + \frac{12 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	-1
b) $A \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{3}{2}$
c) $B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{5}{4} \pi i}$

$$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = -1$$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{3}{2} \pi i}}{2 + i}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{9}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{5}$$

c) $(-1 - i)^{11}$

$$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = -32$$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \cos(t^2) dt$

non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

converge a $\frac{\pi}{2}$

c) $\int_1^{+\infty} te^{-t^2} dt$

converge a $\frac{1}{2e}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $g(x) = e^{2-x^2}$

$$g(x) = e^2 - e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $h(x) = 3x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -5 + (11 - \pi)(x + 1) - 9(x + 1)^2 + \frac{18 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	-4
b) $A \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{9}{2}$
c) $B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{22}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > \sqrt{2}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{7}{4} \pi i}$

$$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = -1$$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{1}{2} \pi i}}{2 + i}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{11}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{2}{5}$$

c) $(-1 + i)^{11}$

$$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = 32$$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge a $\frac{1}{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{3}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{1+x^2}$

$$g(x) = e + ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (5 - \pi)(x + 1) - 3(x + 1)^2 + \frac{6 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	-3
b) $A \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{2}$
c) $B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{17}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \pi i}$

$$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 1$$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\pi i}}{2 + i}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{8}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{5}$$

c) $(1 - i)^{11}$

$$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = -32$$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_2^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{6}$

c) $\int_1^{+\infty} te^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4e^2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $g(x) = e^{2+x^2}$

$$g(x) = e^2 + e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $h(x) = -x^3 + 3x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -2 - \pi(x+1) + 3(x+1)^2 + \frac{\pi^3-6}{6}(x+1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x+1)^5 + o((x+1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	-2
b) $A \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{5}{2}$
c) $B \cap (-\frac{5}{2}, +\infty)$.	$-\frac{12}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$ converge?	$\alpha > 1$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{3}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = 1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{2\pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{12}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{5}$

c) $(1 + i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = -32, \operatorname{Im}(z) = 32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2 + \pi) dt$ non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-2t^2} dt$ converge a $\frac{1}{4}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{1-x^2}$

$$g(x) = e - ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = 2x^3 + x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (7 - \pi)(x + 1) - 6(x + 1)^2 + \frac{12 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	-1
b) $A \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{3}{2}$
c) $B \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{5}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = -1, \operatorname{Im}(z) = -1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{3}{2} \pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{9}{5}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{5}$

c) $(-1 - i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = -32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \cos(t^2) dt$

non converge

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

converge a $\frac{\pi}{2}$

c) $\int_1^{+\infty} te^{-t^2} dt$

converge a $\frac{1}{2e}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico ed esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $f(x) = \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $g(x) = e^{2-x^2}$

$$g(x) = e^2 - e^2x^2 + \frac{e^2}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)**
funzione $h(x) = 3x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -5 + (11 - \pi)(x + 1) - 9(x + 1)^2 + \frac{18 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \text{ per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	-4
b) $A \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{9}{2}$
c) $B \cap (-\frac{9}{2}, +\infty)$.	$-\frac{22}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > \sqrt{2}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi. (Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) $e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{7}{4} \pi i}$

$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = -1$

b) $\frac{4 + 2i + e^{\frac{1}{2} \pi i}}{2 + i}$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{11}{5}, \operatorname{Im}(z) = \frac{2}{5}$

c) $(-1 + i)^{11}$

$\operatorname{Re}(z) = 32, \operatorname{Im}(z) = 32$

Esercizio 2. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_3^{+\infty} t \sin(t^2) dt$ non converge

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge a $\frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge a $\frac{1}{2}$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino i seguenti sviluppi di Taylor (riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata):

- a) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 2 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$$f(x) = (x - 1) - \frac{3}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \text{ per } x \rightarrow 1$$

- b) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 4 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $g(x) = e^{1+x^2}$

$$g(x) = e + ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

- c) sviluppo di Taylor di centro -1 e ordine 6 con resto di Peano della **(2 punti)** funzione $h(x) = x^3 + 2x + \sin(\pi x)$

$$h(x) = -3 + (5 - \pi)(x + 1) - 3(x + 1)^2 + \frac{6 + \pi^3}{6}(x + 1)^3 - \frac{\pi^5}{120}(x + 1)^5 + o((x + 1)^6) \\ \text{per } x \rightarrow -1.$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dati i seguenti due insiemi di numeri reali

$$A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{n + 1.4m \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

e sapendo che $\overline{A} = \mathbb{R}$, determinare l'estremo inferiore dei seguenti insiemi.

Domanda	Risposta
a) $A \cap B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	-3
b) $A \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{7}{2}$
c) $B \cap (-\frac{7}{2}, +\infty)$.	$-\frac{17}{5}$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ converge?	$\alpha > \frac{1}{2}$
b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}\right)$ diverge?	$\alpha \leq \frac{1}{2}$
c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n})}$ converge?	$\alpha > 2$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si calcolino i seguenti integrali (riportando uno svolgimento conciso e motivato; le sole risposte esatte prive di adeguata motivazione non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione):

a) **(4 Punti)** $\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx;$

b) **(4 Punti)** $\int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx.$

Soluzioni.

a) Usando la formula di *integrazione per sostituzione*, con la sostituzione $t = \log x$, otteniamo che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \int_0^1 \frac{t^3 + t}{\sqrt{1 + t^4}} dt = I_1 + I_2$$

dove

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1 + t^4}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^4}} dt.$$

Per calcolare I_1 , facciamo la sostituzione $s = 1 + t^4$ ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2} [\sqrt{s}]_{s=1}^{s=2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Per calcolare I_2 , facciamo prima la sostituzione $s = t^2$ e poi la sostituzione $s = \sinh u$, ottenendo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\cosh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} 1 = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\int_1^e \frac{\log^3 x + \log x}{x\sqrt{1 + \log^4 x}} dx = \frac{\sqrt{2} - 1 + \log(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

b) Osserviamo che $\sin x \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x |\sin x|^3 dx = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x \, dx = [e^x \sin^3 x]_{x=0}^{x=\pi/2} - 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - 3 \left([e^x \sin^2 x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) \, dx \right) \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 3 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x (2 - 3 \sin^2 x) \, dx \\
 &= e^{\pi/2} + 6 \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx - 9I
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} J$$

dove

$$J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned}
 J &= [e^x \sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= e^{\pi/2} - \left([e^x \cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \right) = e^{\pi/2} + 1 - J
 \end{aligned}$$

e quindi

$$J = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Concludiamo allora che

$$I = \frac{1}{10} e^{\pi/2} + \frac{3}{5} \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} = \frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{3}{10}.$$