

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
 È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 08/07/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Data la funzione $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 4}$.

(Motivare *adeguatamente* la risposta. La sola risposta esatta non verrà valutata.)

a) Determinare l'equazione dei suoi asintoti obliqui/orizzontali (se esistono).

$y = x$ asintoto obliquo

b) Determinare l'equazione dei suoi asintoti verticali (se esistono).

$x = -2$, $x = 2$ asintoti verticali

c) Determinare i suoi punti di minimo/massimo relativo (se esistono).

$x = -\sqrt{7 + \sqrt{57}}$ punto di massimo relativo, $x = \sqrt{7 + \sqrt{57}}$ punto di minimo relativo.

Esercizio 2. (5 punti) Calcolare il valore dei seguenti limiti (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+2x^2}-1}$ 1

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$ 11/24

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x}$ $10 \log 5$

Esercizio 3. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie, specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta e riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 + 1) e^{-n}$	converge assolutamente
--	------------------------

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+3)^2}{n^5 - 1}$	converge assolutamente
---	------------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$	diverge
--	---------

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) determinare i valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali i seguenti integrali impropri sono convergenti.

Domanda	Risposta
a) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ e^x - e \cdot x ^\alpha} dx.$	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$
b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{ e^x - e \cdot x + \frac{1}{2} ^\alpha} dx.$	$\alpha > 0$
c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{ e^x - e \cdot x - \frac{1}{2} ^\alpha} dx.$	$0 < \alpha < 1$

Esercizio 5. (5 punti) Rispondere alle seguenti domande.

Domanda	Risposta
a) Quanto vale il prodotto di tutte le soluzioni complesse dell'equazione $\bar{z}^2 + 3z + 1 = 0$?	10
b) Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $e^{5z} = ie^6$ e $\frac{8}{5}\pi < \text{Im}(z) < 2\pi$. Quanto vale z ?	$\frac{6}{5} + i\frac{17}{10}\pi$
c) Si consideri l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : (z+2-i)^4 = 16\}$. Quanto vale $\sup\{ z : z \in A\}$?	$\sqrt{17}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Siano $s \in (0, +\infty)$ e $t \in (0, +\infty)$ due numeri reali. Sono definite le due funzioni $f_s: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_t: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante le formule

$$f_s(x) = s^{1/x}$$

$$g_t(x) = t^{1/(1-x)}.$$

- (1) Per ogni $x \in (0, 1)$, si determini $h_{s,t}(x) = \min \{f_s(x), g_t(x)\}$.
 (2) Si determini

$$\mu = \sup_{0 < x < 1} h_{s,t}(x).$$

Soluzioni. Per simmetria, è sufficiente supporre che $0 < s \leq t$. Distinguiamo tre casi.

1. $0 < s \leq 1 \leq t$. Per ogni $x \in (0, 1)$, risulta che $f_s(x) \leq 1 \leq g_t(x)$. In particolare, $h_{s,t}(x) = f_s(x)$ e $\mu = \sup_{0 < x < 1} s^{1/x} = s$.
2. $1 < s \leq t$. Il segno di $f_s(x) - g_t(x)$ è anche il segno di $\frac{1}{x} \log s - \frac{1}{1-x} \log t$. Moltiplicando e dividendo per $x(1-x) > 0$, ci riconduciamo allo studio del segno della funzione

$$\varphi(x) = \log s - x \log(st).$$

La funzione φ è decrescente in $(0, 1)$, e assume il valore 0 nel punto

$$x_0 = \frac{\log s}{\log(st)}.$$

Quindi

$$f_s(x) \leq g_t(x) \quad \text{se } x_0 \leq x < 1$$

e

$$f_s(x) > g_t(x) \quad \text{se } 0 < x < x_0.$$

Possiamo concludere che $h_{s,t}(x) = g_t(x)$ se $0 < x \leq x_0$, $h_{s,t}(x) = f_s(x)$ se $x_0 \leq x < 1$ e $\mu = s^{1/x_0} = st$.

3. $0 < s \leq t < 1$. Ripetendo lo stesso ragionamento visto nel caso 2, arriviamo ancora alla conclusione $\mu = st$.