

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 16/09/2019

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Dati il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si calcoli la derivata di f in x_0 (se esiste) nei seguenti casi (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $f(x) = \log(2 + \sin(2x)), \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$

$$f'(x_0) = \frac{2}{4 + \sqrt{3}}$$

b) $f(x) = \frac{x^3 + x}{\pi + \arctan x}, \quad x_0 = 0.$

$$f'(x_0) = \frac{1}{\pi}$$

c) $f(x) = |x| \sin(x), \quad x_0 = 0.$

$$f'(x_0) = 0$$

Esercizio 2. (5 punti) Calcolare il valore dei seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$ $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$

b) $\int_{1/2}^1 \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$ $\log \frac{(1+\sin 1)}{(\frac{1}{2}+\sin \frac{1}{2})}$

c) $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 dx$ $2 + \frac{3}{4}\pi$

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino le parti reale e immaginaria dei seguenti numeri complessi riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata (il simbolo $\bar{z}$ indica il complesso coniugato di z).

a) $z = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} + \frac{2 + 2\sqrt{2}i}{\sqrt{2} - i}$	$\Re(z) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \Im(z) = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $z = (1 + i)^3 - (1 - i)^3$	$\Re(z) = 0, \Im(z) = 4$
c) z tale che: $\bar{z} + 2z = \sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi i}$	$\Re(z) = -\frac{1}{3}, \Im(z) = 1$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(x) = \int_0^\pi (tx - \sin t)^2 dt.$$

Domanda	Risposta
a) Quanto vale $\inf\{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$?	$\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi}$
b) Quanto vale $\inf\{F(x) : x \in \mathbb{Q}\}$?	$\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi}$
c) Quanto vale $\inf\{F(x) : x \in \mathbb{Z}\}$?	$\frac{\pi}{2}$

Esercizio 5. (5 punti) Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia f la funzione definita in un intorno di zero dalla formula

$$f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - t^k - 1) dt.$$

Domanda	Risposta
a) Per quali k l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow 0$ è 3?	$k \geq 2$
b) Per quali k risulta che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{ x ^\alpha} = 0$ per ogni $\alpha > 0$?	k pari
c) Per quali k esiste $\alpha > 0$ tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{ x ^\alpha} \neq 0$?	k dispari

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sia data la funzione integrale $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad f(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{e^t - e \cdot t}}, \quad (1)$$

dove l'insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è l'insieme di tutti i numeri reali x tali che l'integrale in (1) è definito in senso proprio od improprio.

- Determinare l'insieme E e stabilire se F ammette asintoti orizzontali.
- Discutere la derivabilità di F , studiando la natura di eventuali punti di non derivabilità. Trovare (se esistono) i punti di massimo/minimo di F distinguendo tra quelli relativi ed assoluti.
- Studiare la convessità di F .
- Studiare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui di F e tracciare un grafico qualitativo di F .

Soluzioni.

- Sia $g(t) = e^t - t \cdot e$ definita su $\mathbb{R}$. Poiché $g(1) = g'(1) = 0$ e $g'(t) > 0$ se e solo se $t > 1$, si ha che $g(t) > 0 \forall t \neq 1$ e $g(t) = \frac{1}{2}g''(1)(t-1)^2 + o((t-1)^2) = \frac{e}{2}(t-1)^2 + o((t-1)^2)$ per $t \rightarrow 1$. Quindi nell'unico punto ($t=1$) in cui il denominatore della funzione integranda in (1) si annulla, si ha, $f(t) \stackrel{t \rightarrow 1}{\sim} \sqrt[3]{\frac{2}{e}} \cdot \frac{1}{(t-1)^{\frac{2}{3}}}$ che è integrabile in senso improprio in un intorno di $t=1$. Quindi $E = \mathbb{R}$. Infine

$$f(t) \stackrel{t \rightarrow -\infty}{\sim} -e^{-\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}} \stackrel{t \rightarrow -\infty}{\rightarrow} -\infty, \quad f(t) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\sim} t \cdot e^{-\frac{t}{3}},$$

per cui f non è integrabile a $-\infty$ e di conseguenza F non ha asintoto orizzontale per $t \rightarrow -\infty$, mentre f è integrabile a $+\infty$ (per t sufficientemente grande $t \cdot e^{-\frac{t}{3}} \leq e^{-\frac{t}{4}}$), quindi la funzione integrale F ammette un asintoto orizzontale per $t \rightarrow +\infty$.

- $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \neq 1$. F non è derivabile in $x=1$ e poiché $F'(x) = f(x) \stackrel{x \rightarrow 1}{\rightarrow} +\infty$, il punto $(1, F(1))$ è un punto a tangente verticale. Poiché dal punto a) abbiamo che $g(t) > 0 \forall t \neq 1$, si ha che $F'(x) > 0, \forall x | x > 0 \wedge x \neq 1$. Per cui $x=0$ è un punto di minimo assoluto con $F(0) = 0$ di conseguenza $F(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- $F''(x) = f'(x) = \frac{1}{3}(e^x - e \cdot x)^{-\frac{4}{3}}[-xe^x + 3e^x - 2e \cdot x]$. Per studiare il segno di F'' basta studiare il segno di $h(x) = -xe^x + 3e^x - 2e \cdot x$. Calcolandone le derivate abbiamo $h'(x) = -xe^x + 2e^x - 2e$, $h''(x) = e^x(1-x)$. Quindi h' ha un massimo assoluto in $x=1$ con $h'(1) = -e$, perciò $h'(x) < 0$ e h è sempre strettamente decrescente. Ma $h(1) = 0$ e quindi $h(x) > 0$ se e solo se $x < 1$. F è convessa in $(-\infty, 1)$ e concava in $(1, +\infty)$.

d) Ci può essere un asintoto obliquo solo per $x \rightarrow -\infty$. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Quindi nemmeno per $x \rightarrow -\infty$ F ammette asintoto obliquo e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$.

