Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x + 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^2}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-1, 0)$

b) $f(x) = \arcsin(x) - x$, $x \in [-1, 1]$

$x = 0$

c) $f(x) = \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$1 \leq \alpha \leq 2$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 - 2 + \arctan 3 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + \sin(1/n)}{n}$ converge assolutamente (2 punti)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2n} \right)$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-1|}, x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 1)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - x, x \in [-2, 2]$

$x = \pm\sqrt{3}$

c) $f(x) = \sin(1/x^3), x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi/2+k\pi}}, k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - \alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^\alpha(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-2 \leq \alpha \leq -1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + 1 - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x + 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^3}$ converge assolutamente (2 punti)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(4n)!}$ converge assolutamente (2 punti)

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n + 1}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 2)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - x$, $x \in [-3, 3]$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

c) $f(x) = \sin(1/x^4)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = 2\alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).**Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020****Parte A****Esercizio 1. (5 punti)** Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 + 2 - \arctan 3 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x - 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log x)} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin(1/n)}{n^3}$	converge assolutamente	(2 punti)
--	------------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2n}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-2, 0)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - x$, $x \in [-4, 4]$

$x = \pm\sqrt{15}$

c) $f(x) = \sin(1/x^5)$, $x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[5]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - 2\alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x + 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin(1/n)}{n^3}$ converge assolutamente (2 punti)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2n}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 1)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - x$, $x \in [-2, 2]$

$x = \pm\sqrt{3}$

c) $f(x) = \sin(1/x^3)$, $x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = 2\alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 - 2 + \arctan 3 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^3}$ converge assolutamente (2 punti)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(4n)!}$ converge assolutamente (2 punti)

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n + 1}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 2)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - x$, $x \in [-3, 3]$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

c) $f(x) = \sin(1/x^4)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - 2\alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).**Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020****Parte A****Esercizio 1. (5 punti)** Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + 1 - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x + 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + \sin(1/n)}{n}$ converge assolutamente (2 punti)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2n} \right)$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-2, 0)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - x$, $x \in [-4, 4]$

$x = \pm\sqrt{15}$

c) $f(x) = \sin(1/x^5)$, $x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[5]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$1 \leq \alpha \leq 2$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 + 2 - \arctan 3 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x - 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log x)} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^2}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-1, 0)$

b) $f(x) = \arcsin(x) - x$, $x \in [-1, 1]$

$x = 0$

c) $f(x) = \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - \alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^\alpha(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-2 \leq \alpha \leq -1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).**Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020****Parte A****Esercizio 1. (5 punti)** Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x + 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin(1/n)}{n^3}$	converge assolutamente	(2 punti)
--	------------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2n}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 1)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - x$, $x \in [-2, 2]$

$x = \pm\sqrt{3}$

c) $f(x) = \sin(1/x^3)$, $x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = 2\alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 - 2 + \arctan 3 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^3}$ converge assolutamente (2 punti)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(4n)!}$ converge assolutamente (2 punti)

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n + 1}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 2)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - x$, $x \in [-3, 3]$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

c) $f(x) = \sin(1/x^4)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - 2\alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + 1 - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x + 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + \sin(1/n)}{n}$ converge assolutamente (2 punti)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2n} \right)$ diverge a $+\infty$ (2 punti)

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-2, 0)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - x$, $x \in [-4, 4]$

$x = \pm\sqrt{15}$

c) $f(x) = \sin(1/x^5)$, $x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[5]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$1 \leq \alpha \leq 2$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).**Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020****Parte A****Esercizio 1. (5 punti)** Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 + 2 - \arctan 3 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x - 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log x)} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^2}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-1, 0)$

b) $f(x) = \arcsin(x) - x$, $x \in [-1, 1]$

$x = 0$

c) $f(x) = \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - \alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^\alpha(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-2 \leq \alpha \leq -1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} - 1 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x + 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin(1/n)}{n^3}$	converge assolutamente	(2 punti)
--	------------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2n}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 1)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - x$, $x \in [-2, 2]$

$x = \pm\sqrt{3}$

c) $f(x) = \sin(1/x^3)$, $x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = 2\alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x - x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 - 2 + \arctan 3 - \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 1) \cos x dx$	2	(2 punti)
--	---	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} dx$	$\frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	-----------------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^3}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(4n)!}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n + 1}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (0, 2)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - x$, $x \in [-3, 3]$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

c) $f(x) = \sin(1/x^4)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - 2\alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{4}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{1}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{2\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^2 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + 1 - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x + 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + \sin(1/n)}{n}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2n} \right)$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+2|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-2, 0)$

b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - x$, $x \in [-4, 4]$

$x = \pm\sqrt{15}$

c) $f(x) = \sin(1/x^5)$, $x \neq 0$

$x = \frac{1}{\sqrt[5]{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \alpha x^2 + \cos x.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\inf A$?	$\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\inf B$?	$\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^{-\alpha}(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$1 \leq \alpha \leq 2$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).**Analisi Matematica I – Seconda prova parziale del 27/01/2020****Parte A****Esercizio 1. (5 punti)** Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata):

a) $\int_1^3 \frac{x + x^2}{1 + x^2} dx$	$\frac{1}{2} \log 5 + 2 - \arctan 3 + \frac{\pi}{4}$	(2 punti)
--	--	------------------

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x - 1) \sin x dx$	-2	(2 punti)
--	----	------------------

c) $\int_1^e \frac{1}{x(1 + \log x)} dx$	log 2	(2 punti)
--	-------	------------------

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^2}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-1, 0)$

b) $f(x) = \arcsin(x) - x$, $x \in [-1, 1]$

$x = 0$

c) $f(x) = \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi/2+k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^-} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$-\frac{1}{2}$
c) Si determini $\inf_{x \in \Omega} f(x)$.	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \cos x - \alpha x^2.$$

Domanda	Risposta
a) Sia $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \text{ è convessa in } \mathbb{R}\}$. Quanto vale $\sup A$?	$-\frac{1}{2}$
b) Sia $B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \max_{[0, \pi]} f_\alpha > 1\}$. Quanto vale $\sup B$?	$-\frac{2}{\pi^2}$
c) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^\alpha(f_\alpha(x) - 1)$ è uniformemente continua?	$-2 \leq \alpha \leq -1$ o $\alpha = 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- Determinare il valore della costante reale β .
- Determinare il valore della costante reale α .
- Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$