

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 27/01/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata)

a) i^{2020}

1

b) $z \in \mathbb{C}$ tale che $\frac{1}{z} + \frac{1}{2-i} = \frac{3}{1+i}$.

$\frac{11}{41} + \frac{17}{41}i$

c) $\frac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$

$-\frac{14}{25} + \frac{2}{25}i$

Esercizio 2. (5 punti) Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta). Si motivino *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non verranno valutate.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{n^2}$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
---	---------------------	------------------

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$	converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$	diverge a $+\infty$	(2 punti)
--	---------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino tutti i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni, riportando uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $f(x) = e^{|x|+|x+1|}$, $x \in \mathbb{R}$

Ogni $x \in (-1, 0)$

b) $f(x) = \arcsin(x) - x$, $x \in [-1, 1]$

$x = 0$

c) $f(x) = \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi/2 + k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Sia

$$\Omega = \left\{ x \in (0, +\infty) \mid \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}} \text{ esiste finito.} \right\}$$

Definiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{p \rightarrow (1/2)^+} \frac{2p-1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^{(2p-1)^2}}}.$$

Domanda	Risposta
a) Si determini esplicitamente l'insieme Ω .	$(0, e)$
b) Si determini il valore di $f'(1)$.	$\frac{1}{2}$
c) Si determini $\sup_{x \in \Omega} f(x)$.	$+\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito da

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } \sin \frac{1}{x} \geq 0 \right\}.$$

[Ricordare che gli insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono sia aperti che chiusi]

Domanda	Risposta
a) Qual è l'estremo inferiore di A ?	0
b) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $(\alpha, +\infty) \cap A$ è aperto?	$\alpha \geq \frac{1}{\pi}$
c) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $(-\infty, \alpha] \cap A$ è chiuso?	$\alpha \leq 0$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sapendo che esistono un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e due uniche costanti reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$\int_0^x [e^{-x} - e^{-t}] f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta \quad (1)$$

- a) Determinare il valore della costante reale β .
- b) Determinare il valore della costante reale α .
- c) Determinare il valore di f nel punto $x = 0$.

Soluzioni.

- a) Calcolando (1) in $x = 0$ si ottiene $0 = \log 2 + \beta$, quindi si deve necessariamente avere $\beta = -\log 2$.
- b) Usando la linearità dell'integrale, l'uguaglianza (1) può essere riscritta come

$$e^{-x} \int_0^x f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \log(2 + x + x^2) + \alpha x + \beta.$$

Derivando quest'ultima uguaglianza e applicando il teorema della derivazione del prodotto di funzioni e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$-e^{-x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} + \alpha. \quad (2)$$

Calcolando (2) in $x = 0$ si ha $0 = \frac{1}{2} + \alpha$ per cui $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- c) Mettendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (2) si ottiene

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t) dt = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{x(x-3)}{2+x+x^2}.$$

Derivando quest'ultima relazione si ottiene:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{-6 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{(2+x+x^2)^2},$$

per cui $f(0) = F'(0) = -\frac{3}{4}$. Alternativamente, poiché l'esercizio richiedeva solo il valore di f in $x = 0$, si poteva, più semplicemente, calcolare direttamente la derivata in tale punto

$$f(0) = F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h}{2} \cdot \frac{h(h-3)}{2+h+h^2} - 0}{h} = -\frac{3}{4}.$$