

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
 È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2020

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si risolvano le seguenti equazioni in campo complesso (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $z^3 = 27i$

$$-3i, \quad \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i, \quad -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$$

b) $z^4 + z^3 + z^2 + z = 0$

$$0, -1, i, -i$$

c) $(|z - 1 - i| - 2)^2 + |z - \bar{z} + 2i|^2 = 0$

$$1 - i$$

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore dei seguenti limiti, motivando *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte senza giustificazione non saranno valutate.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$	$1/2$	(2 punti)
--	-------	------------------

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\cos(2x) - \cos x) \sin x}$	$-1/3$	(2 punti)
--	--------	------------------

c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^x - 1}{\log(x+1)}$	$-\infty$	(2 punti)
--	-----------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono determinandone il valore in caso di convergenza. Riportare uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin t}{t} dt$

Non converge

b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\log t)^2} \cdot \frac{1}{t} dt$

$\frac{1}{\log 2}$

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin t}} \cdot \cos t dt$

-2

Parte B**Esercizio 4. (5 punti)** Si considerino le due funzioni $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - 1} \right)^{1/3} - 1, \quad g(x) = 1 - \left(-\frac{\log(1 - x^3)}{\log(1 + x^3)} \right)^{1/2}.$$

Domanda	Risposta
a) Qual è l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \rightarrow 0^+$?	2
b) Qual è l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0^+$?	3
c) Quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$?	$-\infty$

Esercizio 5. (5 punti) Date le due successioni

$$b_n = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{n}}}{n^\alpha}, \quad a_n = \frac{\sqrt[4]{n}}{n^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ ciascuna delle seguenti serie è convergente.

Domanda	Risposta
a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n + a_n)$	$\alpha > \frac{5}{4}$
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n)$	$\alpha > \frac{3}{4}$
c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (b_n - a_n)$	$\alpha > -\frac{1}{4}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri l'equazione

$$t = \tan t \quad (1)$$

nell'incognita $t \in \mathbb{R}$.

- a) Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, esiste una soluzione di (1) tale che $n\pi < t_n < n\pi + \pi/2$. Se ne deduca che $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$.
- b) Si dimostri che $t_n \sim n\pi$ per $n \rightarrow +\infty$.
- c) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n - n\pi$.

Soluzioni.

- a) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta $\tan(n\pi) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow (n\pi + \pi/2)^-} \tan t = +\infty$. Il teorema degli zeri, applicato alla funzione $\tan t - t$ per le funzioni continue garantisce l'esistenza di $t_n \in (n\pi, n\pi + \pi/2)$ tale che $t_n = \tan t_n$. Per il teorema del confronto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi = +\infty$.
- b) In ciascun intervallo $t_n \in (n\pi, n\pi + \pi/2)$, con $n \in \mathbb{N}$, l'equazione (1) è equivalente a

$$t_n = \arctan t_n + n\pi. \quad (2)$$

Pertanto

$$\frac{t_n}{n\pi} = \frac{\arctan t_n}{n\pi} + 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

e passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ deduciamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n / (n\pi) = 1$.

- c) Ancora dall'identità (2) deduciamo che

$$t_n - n\pi = \arctan t_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n - n\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan t_n = \pi/2$.