

Cognome:.....Nome:.....Matricola:.....

(.1) [Var. 1] Quale tra i seguenti insiemi è più che numerabile?

- | | |
|---|---|
| ☐ (a) $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right)$ | ☐ (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\}$ |
| ☐ (b) $\mathbb{Q}$ | ☐ (d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 0\}$ |

(.2) [Var. 1] Sia $z = -3e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{2}}$. La parte immaginaria di $\frac{1}{z}$ vale

- | | |
|--|---|
| ☐ (a) $[-] -\frac{1}{10}$. | ☐ (c) $\frac{2}{5}$. |
| ☐ (b) $\frac{1}{10}$. | ☐ (d) $-\frac{2}{5}$. |

(.3) [Var. 1] Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con la seguente proprietà: esiste $L > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$, si abbia $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ☐ (a) $[=]$ La funzione f è costante in $[a, b]$.
- ☐ (b) La funzione f non è lipschitziana.
- ☐ (c) La funzione f deve cambiare segno almeno una volta in $[a, b]$.
- ☐ (d) $f(a) = 0$.

(.4) [Var. 1] Il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+2x}{x^3-x^2}} - 1\right) \left(3^{\frac{x}{1+x^3}} - 1\right)}{\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) \ln \frac{x+3}{x}} \quad \text{vale:}$$

- | | |
|--|--|
| ☐ (a) $[=] \frac{2}{9} \ln 3$ | ☐ (c) $-10 \ln 2$ |
| ☐ (b) $\frac{8}{3} \ln 3$ | ☐ (d) $\frac{1}{3} \ln 2$ |

(.5) [Var. 1] Sia $\{a_n\}$ una successione reale tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converga. Allora

- | | |
|---|---|
| ☐ (a) $[=] \sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ converge. | ☐ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. |
| ☐ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(a_n)$ oscilla. | ☐ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. |

(.6) [Var. 1] In quale dei seguenti casi la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n^b (\log n)^c}$$

è convergente?

☐ (a) [=] $|a| < 1/2, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

☐ (b) $|a| > 1/2, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

☐ (c) $a \in \mathbb{R}, b > 0, c \in \mathbb{R}$.

☐ (d) $a = 2, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

(.7) [Var. 1] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile 2 volte nell'intervallo $[0, 1]$, con $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, $f'(0) = -1$, $f'(1) = 2$. Allora si ha che:

☐ (a) [=] f presenta un punto di minimo in $(0, 1)$

☐ (b) f è crescente in $[0, 1]$

☐ (c) f è decrescente in $[0, 1]$

☐ (d) f presenta un punto di massimo in $(0, 1)$

(.8) [Var. 1] Sia $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$ (dove $[x]$ indica la parte intera di x). Si consideri la funzione integrale $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Allora

☐ (a) [=] F è lipschitziana.

☐ (b) F non è continua in $x = 0$.

☐ (c) F è crescente.

☐ (d) F è derivabile in $x = 0$.

(.9) [Var. 1] L'integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4|x| + 3} dx$$

vale

☐ (a) [=] $\log(3/2)$

☐ (b) $-\log(3/2)$

☐ (c) $\log 6$

☐ (d) $-\log 6$

(.10) [Var. 1] Si considerino i due integrali impropri

$$\int_0^5 \frac{\ln x}{x^2} |\sin(x+1)| dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} |\sin(x+1)| dx.$$

☐ (a) [=] Il primo non converge, il secondo converge

☐ (b) Nessuno dei due converge

☐ (c) Convergono tutti e due

☐ (d) Il primo converge, il secondo non converge

(.11) [Var. 1] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile 4 volte in $\mathbb{R}$ tale che $f(x) = x + x^2 + x^3 - 2x^4 + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{x^2} f(x)$. Quanto vale la derivata quarta di g in $x = 0$?

☐ (a) [=] -24 .

☐ (b) -1 .

☐ (c) -2 .

☐ (d) -48 .