

(.1) [Var. 1] In quale dei seguenti casi l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ verifica la proprietà: «Ogni punto di A è interno ad A »?

☐ (a) [=] $A = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n^x \text{ converge} \}$.

☐ (b) $A = \mathbb{Q}$.

☐ (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ non converge} \}$.

☐ (d) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

(.2) [Var. 1] Qual è la soluzione di massimo modulo dell'equazione complessa $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$?

☐ (a) [=] $12 + 5i$.

☐ (b) $12 - 5i$.

☐ (c) $5 + 12i$.

☐ (d) $5 - 12i$.

(.3) [Var. 1] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(1) = 0$. Perché f^3 , cioè la funzione $x \mapsto (f(x))^3$, sia differenziabile in $x = 1$ è

☐ (a) [=] sufficiente che $f(1+t) = o(|t|^{1/2})$ per $t \rightarrow 0$.

☐ (b) necessario che f sia differenziabile in $x = 1$.

☐ (c) sufficiente che f^5 sia differenziabile in $x = 1$.

☐ (d) necessario che $f(1+t) = o(|t|)$ per $t \rightarrow 0$.

(.4) [Var. 1] Il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \sin(\cos x - 1) + 3x^2 + \cos(\sin(x^2/\sqrt{2})) - 1}{x^6}$$

vale

☐ (a) [=] $\frac{7}{60}$

☐ (b) $\frac{5}{60}$

☐ (c) 0

☐ (d) $+\infty$

(.5) [Var. 1] Data una successione a termini positivi $a_n > 0$ con $n \geq 2$, quale, tra le seguenti, è una condizione sufficiente per la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-a_n} ?$$

- | | | |
|--|--|--|
| ☐ (a) [=] $a_{n+1} \geq 1 + a_n$ per ogni $n \geq 2$
☐ (b) $a_n < \log n$ per ogni $n \geq 2$ | | ☐ (c) $a_n > \log n$ per ogni $n \geq 2$
☐ (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ |
|--|--|--|

(.6) [Var. 1] Sia $\alpha > 0$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+n^{-2})^{\alpha} (1+n^2)^{-\alpha} \left(\log(1+n^{-3}) \right)^{\alpha}$$

converge se e solo se

- ☐ (a) [=] $\alpha > \frac{1}{5}$.
☐ (b) $\alpha > \frac{1}{6}$.
☐ (c) $\alpha > \frac{1}{3}$.
☐ (d) $\alpha > \frac{1}{7}$.

(.7) [Var. 1] Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(3) = 7$. Perché $x_0 = 3$ sia punto di massimo assoluto per f è

- ☐ (a) [=] necessario che f sia superiormente limitata.
☐ (b) sufficiente che f sia crescente in $(-\infty, 3)$ e decrescente in $(3, +\infty)$.
☐ (c) necessario che f sia derivabile in $x_0 = 3$ e $f'(3) = 0$.
☐ (d) necessario che f sia continua in $x_0 = 3$.

(.8) [Var. 1] Per ogni $t \in \mathbb{R}$, definiamo $f_t(x) = \min\{\sin x, t\}$ per ogni $x \in [0, 2\pi]$. Quanto vale il $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f_t(x) dx$?

- | | | |
|--|--|---|
| ☐ (a) [=] 0
☐ (b) $+\infty$ | | ☐ (c) $-\infty$
☐ (d) non esiste |
|--|--|---|

(.9) [Var. 1] Il seguente integrale

$$\int_1^{27} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x}) + 1}{\sqrt[3]{x^2} \ln 2} dx$$

vale:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--|---------------------------------|--|---------------------------------|--|---------------------------------|
| ☐ (a) [=] 18 | | ☐ (b) 24 | | ☐ (c) 32 | | ☐ (d) 30 |
|-------------------------------------|--|---------------------------------|--|---------------------------------|--|---------------------------------|

(.10) [Var. 1] Si consideri l'insieme

$$\Omega = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \text{l'integrale } \int_0^1 \frac{dx}{1-tx} \text{ è convergente} \right\}.$$

Quanto vale $\sup \Omega$?

☐ (a) [=] 1☐ (b) 0☐ (c) $+\infty$ ☐ (d) $1/2$

(.11) [Var. 1] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte con continuità (cioè di classe C^2) tale che $f(0) = 1$ e

$$f'(x) = f(x) + e^{-x}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Allora il suo polinomio di Taylor del secondo ordine $P_2(x)$ centrato in $x = 0$ è dato da

☐ (a) [=] $P_2(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2$ ☐ (b) non esiste☐ (c) $P_2(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2$ ☐ (d) $P_2(x) = 1 + 2x - x^2$