

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/09/2021

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcolino i seguenti integrali (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx$	$-\frac{1}{2} + 2 \log 2$
b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$	$\pi^2 - 4$
c) $\int_{-1}^1 \frac{1 + \sin x}{x^2 + 1} dx$	$\frac{\pi}{2}$

Esercizio 2. (5 punti) Si dica se le seguenti serie numeriche sono convergenti. In caso di convergenza si specifichi se si tratta di convergenza assoluta (motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata).

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot n^2 \cdot \frac{n^2 + n + 3}{n^3 + 1} \cdot \sin \frac{1}{n}$	Irregolare	(2 punti)
---	------------	------------------

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$	Converge ma non assolutamente	(2 punti)
---	-------------------------------	------------------

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{n^2 + n + 3}{n^3 + 1} \cdot \log \left(\frac{1+n}{n} \right)$	Converge assolutamente	(2 punti)
---	------------------------	------------------

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato. Riportare uno svolgimento *sintetico* ed *esauriente*; la sola risposta esatta senza adeguata motivazione non verrà valutata.

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sin(x^3) + \log(1 - x^2)}{x^6 - 4}, \quad x_0 = 0 \quad 0$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\arctan(\sin(\pi + x^2))}{e^{2x + \log(1+x^2)}}, \quad x_0 = 0 \quad 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 + \int_0^x e^{-t^2} dt}, \quad x_0 = 0 \quad 1$$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Dato il polinomio in campo complesso

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 4z + 4$$

Domanda	Risposta
a) Determinare tutte le soluzioni di $P(z) = 0$ sapendo che $P(1+i) = 0$.	$1 \pm i, \pm\sqrt{2}i$
b) Quante sono le soluzioni distinte dell'equazione $e^{P(z)\pi i} = 1$?	Infinite
c) Tra le soluzioni di $e^{P(z)\pi i} = 1$, determinare quella di modulo minimo.	$z = 0$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni $f, g : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}, \quad g(x) = \cos(x + x^2) - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Domanda	Risposta
a) Qual è l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow 0$?	2
b) Qual è l'ordine di infinitesimo di g per $x \rightarrow 0$?	3
c) Quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{g(x)}$	$\frac{1}{3}$

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ sia convergente. Si consideri la funzione $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(tx) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(tx) dx.$$

a) Se f è una funzione pari, si dimostri che $\hat{f}(t) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(tx) dx$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Se f è dispari, si dimostri che $\hat{f}(t) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(tx) dx$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

b) Siano $\tau > 0$ e $E \in \mathbb{R}$ due numeri assegnati. Si calcoli $\hat{f}$, dove

$$f(x) = \begin{cases} E & \text{se } -\tau/2 \leq x \leq \tau/2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

c) Si calcoli $\hat{f}$, dove

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzioni.

a) È sufficiente effettuare il cambiamento di variabile $x \mapsto -x$, ed utilizzare le ipotesi di parità o disparità.

b) Innanzitutto f è una funzione pari. Quindi

$$\hat{f}(t) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(tx) dx = 2 \int_0^{\tau/2} E \cos(tx) dx = \frac{2E}{t} \sin\left(\frac{\tau t}{2}\right)$$

se $t \neq 0$, e $\hat{f}(0) = E\tau$.

c) Per definizione,

$$\hat{f}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (\cos(tx) - i \sin(tx)) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(tx) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(tx) dx.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos(tx) dx &= \frac{e^{-x}(t \sin(tx) - \cos(tx))}{t^2 + 1} \\ \int e^{-x} \sin(tx) dx &= -\frac{e^{-x}(\sin(tx) + t \cos(tx))}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo,

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{t^2 + 1} - i \frac{t}{t^2 + 1}.$$

