Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(3n)!}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \log n}{n^4 - n + 5}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

a) converge assolutamente; b) diverge a $+\infty$; c) converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 (\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x}) dx, \quad b) \int_1^e \frac{\sin(-3 + \log x)}{x} dx, \quad c) \int_0^1 \frac{x}{x+5} dx.$$

a) $\frac{23}{21}$, b) $\cos 3 - \cos 2$, c) $1 + 5 \log \frac{5}{6}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^5 + 2)^{1/4} - (x^2 + 1)^{1/3}}{(x^4 + 2)^{1/5} - (x^3 + 1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4+x}{1+x} \right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6 , c) -1

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(\arctan x - x \cos x)(\sqrt{1+x^4} - 1) - x^7}{\log(1+x^3) - \sin(x^3) + \frac{1}{2}x^6}.$$

Risposta: $\frac{19}{10}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \dots$ è assegnata la funzione $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0, 1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max \{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0, 1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0, 1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Si ha che $f'_n(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f'_n(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max \{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f'_n(x)| = f'_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{4z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $2 + \sqrt{3}$