

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a) f(x) = \log \left(1 + \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) \right), \quad x_0 = \pi;$$

$$b) f(x) = \frac{|1+x|}{(1+x^2)^2}, \quad x_0 = 0;$$

$$c) f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t dt, \quad x_0 = 1.$$

$a) -\frac{2\sqrt{3}}{15}; b) 1; c) 32.$

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \quad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \quad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cos(\pi n)}{n^3 + 3}.$$

$a)$ non converge, $b)$ non converge, $c)$ converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 (e - x^2 e^x) \, dx, \quad b) \int_0^1 (e - 2xe^{x^2}) \, dx, \quad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx.$$

a) 2, b) 1, c) $\log 2 - \frac{1}{2}$

Parte B

Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

Domanda	Risposta
a) Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\operatorname{Re} z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + i$?	$-2 + i$
c) Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^2} e^{-s^2} \, ds \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1 , a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow 0$?

$$a_1 = \dots\dots\dots, \quad a_2 = \dots\dots\dots,$$

b) Per quali valori di a_1 , a_2 e a_6 accade che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$$a_1 = \dots\dots\dots, \quad a_2 = \dots\dots\dots, \quad a_6 = \dots\dots\dots,$$

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_6 = -1/3$.

Parte C Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t) \sqrt[3]{3 - 2t}}, \quad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspidi di F .

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in (1, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, 2). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.

Poiché $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^\pm} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspidi.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Per $t \rightarrow -\infty$

$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \rightarrow -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_1^2 f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2} + t\right) + f\left(\frac{3}{2} - t\right) \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + t^2}}{\sqrt[3]{2t} \left(1 + e^{\frac{3}{2}+t}\right) \left(1 + e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}} (e^{-t} - e^t) dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.

