

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere di due (e non più di due) delle seguenti serie, stabilendo se convergono, divergono o oscillano:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}; \quad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+1}}; \quad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(4n)!}.$$

a) converge; *b)* diverge; *c)* converge.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali.

$$a) \int_0^1 x \log x \, dx, \quad b) \int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1} \, dx, \quad c) \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} \, dx.$$

$$a) -\frac{1}{4}, \quad b) \frac{1}{2} \log^2 2, \quad c) -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti limiti

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^4)}{\sin^2(x^2)}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(e + \frac{2}{x} \right)^x.$

a) -1 , b) 1 , c) $e^{2/e}$

Parte B

Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione

Esercizio 4. (5 punti) Si considerino le funzioni $g, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$g(x) = \cos(x - \sin x) - 1, \quad f(x) = 2 - \sqrt[72]{1 + x^6} - \cos(x - \sin x).$$

a) Qual è l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ della funzione g ?

b) Qual è l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ della funzione f ?

c) Detto α l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di f , quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$?

Risposta: a) 6; b) 8; c) $-\frac{1}{720}$.

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino i seguenti tre numeri complessi

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = 2i$$

a) Determinare la forma esponenziale del numero complesso $\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}\right)^{-5}$:

b) Determinare

$$\min \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Im} \left[\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} \right)^{-n} \right] = 0 \right\} :$$

c) Determinare

$$\min \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re} \left[\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} \right)^{-n} \right] = 0 \right\} :$$

Risposta: a) $\frac{\sqrt{2}}{8} e^{\frac{1}{12}\pi i}$, b) 12, c) 6.

Parte C

Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; le sole risposte esatte non verranno valutate.

Esercizio 6. (8 punti) Ricordiamo che z è un punto fisso per una funzione f se $f(z) = z$.

- a) Se f è una funzione reale, derivabile in un intervallo I e tale che $f'(x) \neq 1$ per ogni $x \in I$, si dimostri che f possiede al più un solo punto fisso appartenente ad I .
- b) Costruire una funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che possieda due punti fissi appartenenti a $[0, 1]$.
- c) Se $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è una funzione continua, si dimostri l'esistenza di almeno un punto fisso per f in $[0, 1]$.
- d) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà: esiste $L \in (0, 1)$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Si dimostri che f possiede al più un solo punto fisso.
- e) Si dimostri che la funzione $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definita da $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ non possiede punti fissi e soddisfa la condizione $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ per ogni $x \neq y$.

SOLUZIONE

- a) Se f possedesse due punti fissi x_1 e x_2 , allora, per il teorema di Rolle, esisterebbe un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che la derivata della funzione $x \mapsto f(x) - x$ si annullerebbe in c . Questo contraddice l'ipotesi su f ;
- b) Ad esempio $f(x) = x^2$.
- c) Basta considerare la funzione $g(x) = f(x) - x$. Se $f(0) = 0$ oppure se $f(1) = 1$, la dimostrazione è finita. Altrimenti $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Dunque $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$, e per il Teorema dei Valori Intermedi deduciamo l'esistenza di uno zero z di g in $[0, 1]$. Pertanto $g(z) = 0$, e z è un punto fisso di f .
- d) Supponiamo che $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$, con $x_1 \neq x_2$. Dunque

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|,$$

sicché $0 \leq (1 - L)|x_1 - x_2| \leq 0$, una contraddizione.

- e) Per $x > y$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| x - y + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \left| (x - y) - \frac{x - y}{(1+x)(1+y)} \right| = |x - y| \left| 1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &< |x - y|. \end{aligned}$$

Scambiando x con y si ottiene che $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ per ogni $x \neq y$. Basta osservare che $f(x) = x$, cioè $x + \frac{1}{1+x} = x$, implica $\frac{1}{1+x} = 0$ che non ha soluzione.

