

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti funzioni si calcoli il valore $f'(x_0)$:

a) $f(x) = \log(1 + x^x)$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = \arctan(\sin(x^2 - 2))$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \frac{x^5}{x^2 - e^{-x}}$, $x_0 = 0$.

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{4 \cos 2}{1 + \sin^2 2}$; c) 0.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il carattere di due (e non più di due) tra le seguenti serie:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n + 4}, \quad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - 6}{n^5 - n^2 + 7}, \quad c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan n}{5^n}.$$

$a)$ diverge; $b)$ converge; $c)$ converge.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcoli il valore di due e non più di due dei seguenti integrali (propri od impropri).

$$a) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx, \quad b) \quad \int_0^1 (e - x^2 e^x) dx, \quad c) \quad \int_{-1}^1 \sqrt{x^2} dx.$$

$$a) \quad 2(e - 1), \quad b) \quad 2 \quad c) \quad 1.$$

Parte B Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Esercizio 4. (5 punti)

a) Si determinino tutte le soluzioni $w \in \mathbb{C}$ dell'equazione $w^3 = \frac{1+i}{1-i}$;

b) si determini il numero reale α definito da

$$\alpha = \sup \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \text{ e } \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^3 = \frac{1+i}{1-i} \right\}.$$

Risposta: a) $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_2 = -i$, b) $\alpha = 2 + \sqrt{3}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $s \geq 0$ e $t \geq 0$ denotiamo con $L(s, t)$ il valore — eventualmente infinito — del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left((1 - t^3)^{3/4} - 1\right)^{2s}}{\left(\frac{2}{2 - \sin x} - \cos(x^2) - \frac{x}{2}\right)^{t+1}}$$

- a) Determinare l'insieme dei punti $E = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geq 0, t \geq 0, L(s, t) \in \mathbb{R}\}$.
- b) Si determini il valore — eventualmente infinito — di $L(s, s)$ al variare di $s \geq 0$.

SOLUZIONE

- a) Utilizzando gli sviluppi di Taylor si trova dopo qualche semplificazione che

$$E = \left\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geq 0, t \geq 0, 3s \geq t + 1\right\}.$$

- b) Per $t = s$, il punto a) mostra che $L(s, s) = 0$ per $s > 1/2$, $L(s, s) = +\infty$ per $s < 1/2$, e $L(1/2, 1/2) = -6$.

Parte C Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.

Esercizio 6. (8 punti) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- a) Si dimostri che f è pari.
- b) Si dimostri che f è derivabile in $\mathbb{R}$.
- c) Si stabilisca se $f \in C^1(\mathbb{R})$.
- d) Si stabilisca se f è lipschitziana.
- e) Si discuta, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la risolubilità dell'equazione $f(x) = \alpha$.

Risposta: a) Usando la formula di integrazione per sostituzione si ottiene che, per ogni $x \neq 0$,

$$f(-x) = -\frac{1}{x} \int_0^{-x} e^{-t^2} dt \stackrel{s=-t}{=} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-s^2} ds = f(x),$$

quindi f è pari.

b) Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, la funzione $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi f è derivabile in ogni $x \neq 0$ in quanto rapporto di funzioni derivabili. Osserviamo che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt - 1}{x} = \frac{\int_0^x (e^{-t^2} - 1) dt}{x^2},$$

quindi, per il Teorema di l'Hôpital, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{-t^2} - 1) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} (-x) = 0.$$

Concludiamo che f è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

c) Per il Teorema Fondamentale del Calcolo e le note regole di derivazione abbiamo che, per ogni $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{x} e^{-x^2} = -\frac{1}{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{x} (e^{-x^2} - 1) + \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x (e^{-t^2} - 1) dt + \frac{e^{-x^2} - 1}{x}. \end{aligned}$$

Quindi f' è continua in ogni $x \neq 0$. Inoltre, dato che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x (e^{-t^2} - 1) dt = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} = 0$ per quanto visto nel punto b), concludiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ e f' è continua in 0. Abbiamo così dimostrato che $f \in C^1(\mathbb{R})$.

d) Per il punto precedente sappiamo che f' è continua in $\mathbb{R}$. Inoltre, dato che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge (come si vede facilmente per confronto), si ha che

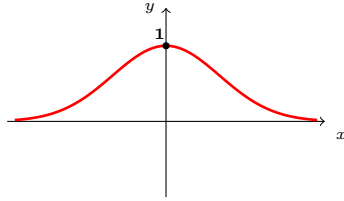
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{x} e^{-x^2} \right) = 0.$$

Segue che f' è limitata in $\mathbb{R}$. Infatti, da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$ segue che esiste $R > 0$ tale che $|f'(x)| < 1$ se $|x| > R$; inoltre f' è limitata su $[-R, R]$ per il Teorema di Weierstrass. Essendo f derivabile con f' limitata, concludiamo che f è lipschitziana in $\mathbb{R}$.

e) Osserviamo che, per ogni $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x (e^{-x^2} - e^{-t^2}) dt.$$

Se $x > 0$ e $t \in (0, x)$, essendo $t \mapsto e^{-t^2}$ decrescente in $[0, x]$, si ha che $e^{-x^2} - e^{-t^2} < 0$. Quindi $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Segue che f è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$. Inoltre, essendo f pari, f è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$. Si deduce così che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 0$. Dalla convergenza dell'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ segue che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Un grafico qualitativo della f risulta allora come in figura:



Dall'analisi del grafico, concludiamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ non ha soluzioni se $\alpha > 1$ o $\alpha \leq 0$, ha esattamente due soluzioni per $\alpha \in (0, 1)$ e ha esattamente una soluzione (data da $x = 0$) per $\alpha = 1$.