

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola: .....

**Consegnare solo il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

**Parte A** Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

**Esercizio 1. (5 punti)** Si determini la derivata della funzione  $f$  nel punto  $x_0$  in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right)^x, \quad x_0 = 1; \\ \text{b)} & f(x) = \frac{\arcsin x}{\cosh x}, \quad x_0 = 0; \\ \text{c)} & f(x) = \arctan \left( \frac{x^4 - 4}{x^4 + 4} \right), \quad x_0 = \sqrt{2}. \end{array}$$

a)  $-\frac{\log 2}{2}$ ; b) 1; c)  $\sqrt{2}$ .

**Esercizio 2. (5 punti)** Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali:

$$\text{a)} \int_{-10}^{10} x^3 \sin(x^4) dx; \quad \text{b)} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x) \cdot 2^{\tan x} dx; \quad \text{c)} \int_1^e \log_3 x dx.$$

a) 0; b)  $\frac{1}{\log 2}$ ; c)  $\frac{1}{\log 3}$ .

**Esercizio 3. (5 punti)** Si risolvano in campo complesso due (e non più di due) delle seguenti equazioni:

$$\text{a)} z^3 = 1; \quad \text{b)} z^2 - 2z + 20 = 0; \quad \text{c)} z(1 + i) = e^{\frac{\pi}{2}i} + (3i - 2)^2.$$

a)  $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; b)  $1 \pm \sqrt{19}i$ ; c)  $-8 - 3i$ .

**Parte B** Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

**Esercizio 4. (5 punti)** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{n+2} \left[ \frac{n^2+1}{n+1} \right], & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1 + (n-2)e^{-n}, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

dove  $[x]$  denota la parte intera di  $x \in \mathbb{R}$ . Sia  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

a) Si determinino  $\sup A$  e  $\inf A$ . Esistono  $\max A$ ,  $\min A$ ?

b) Si determinino  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  e  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Risposta:** a)  $\sup A = \max A = 1 + e^{-3}$ ,  $\inf A = -1$ ,  $\min A$  non esiste; b)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ .

**Esercizio 5. (5 punti)** Siano  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  tre numeri reali. Sono definite le funzioni reali di una variabile reale

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad g(x) = \tan x.$$

- a) Se  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow 0^+$ , quanto valgono  $a_0$  e  $a_1$ ?
  - b) Per quali valori di  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  risulta  $f'(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ ?
  - c) Esistono valori di  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  tali che  $f(x) \sim g'(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ ?
- a)  $a_0 = a_1 = 0$ ; b)  $a_0$  qualunque,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1/2$  c)  $a_0 = 1$ ,  $a_1$  e  $a_2$  qualunque.

## Parte C

Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.

### Esercizio 6. (8 punti)

- i) Si determini l'insieme  $E \subset \mathbb{R}$  di tutti i punti  $x \in \mathbb{R}$  per i quali esiste, eventualmente in senso improprio, il seguente integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{\log(t) + t^2 - 1}{1 + \log(1+t) + t^2} dt, \quad x \in E \subset \mathbb{R},$$

e sia  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione integrale così definita.

- ii) Determinare l'insieme  $\bar{E}$  in cui  $F$  è derivabile e gli intervalli in cui è crescente e decrescente individuando eventuali punti di massimo/minimo relativi/assoluti.
- iii) Stabilire se la funzione integrale  $F$  è Lipschitziana.
- iv) Stabilire se  $F$  è uniformemente continua [Suggerimento: distinguere i due insiemi  $E_1 = \{x \in E \mid x \leq 1\}$  e  $E_2 = \{x \in E \mid x \geq 1\}$ ].

### Risposta:

- i) La funzione integranda  $f(t) = \frac{\log(t) + t^2 - 1}{1 + \log(1+t) + t^2}$  è definita e continua in  $t \in (0, +\infty)$ . Poiché  $f(t) \stackrel{t \rightarrow 0^+}{\sim} \log(t)$  e la funzione  $\log(t)$  è integrabile in senso improprio in un intorno destro di zero si ha che  $E = [0, +\infty)$ .
- ii) La funzione integranda  $f$  è continua in  $(0, +\infty)$ , quindi la funzione integrale  $F$  è derivabile in tale insieme con  $F'(x) = f(x) = \frac{\log(x) + x^2 - 1}{1 + \log(1+x) + x^2}$ . Poiché  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , la funzione integrale non è derivabile in  $x = 0$  pur essendo in tale punto continua. Perciò  $\bar{E} = (0, +\infty)$ . Infine, poiché  $f(x) > 0$  se e solo se  $x > 1$ ,  $x = 1$  è un punto di minimo assoluto con  $F(1) = 0$  mentre  $x = 0$  è un punto di massimo relativo. Infatti,  $F$  non può avere massimi assoluti in quanto  $f(t) \sim 1$  per  $t \rightarrow +\infty$  e quindi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .
- iii) Poiché  $F'(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$ ,  $F$  non può essere Lipschitziana in  $E$  in quanto ha derivata illimitata.
- iv) In  $[1, +\infty)$ ,  $F'$  è limitata e quindi, su tale insieme,  $F$  è Lipschitziana e di conseguenza uniformemente continua. In  $[0, 1]$   $F$  è continua su un intervallo chiuso e limitato e quindi è uniformemente continua su tale insieme. Di conseguenza  $F$  è uniformemente continua su tutto il suo dominio di definizione  $E$ .



