

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini la forma algebrica di due (e non più di due) tra i seguenti numeri complessi:

$$\text{a) } (1 - i)^{-8}; \quad \text{b) } \left(e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^2; \quad \text{c) } \sum_{k=8}^{11} i^k.$$

Risposte: a) $\frac{1}{16}$; b) $(-1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})i$; c) 0

Esercizio 2. (5 punti) Si determinino il *limite superiore* e il *limite inferiore* ($\limsup$ e $\liminf$) di due (e non più di due) delle seguenti successioni reali:

a) $a_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3} \right]$ (dove $[\cdot]$ denota la parte intera);

b) $b_n = \frac{2 + (-1)^n}{2 \cos(n\pi)}$;

c) $c_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

Risposte: a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$; b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{1}{2}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{2}$;
c) $\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali, eventualmente impropri:

$$\text{a) } \int_5^6 \frac{x}{2x^2 - 1} dx; \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3+1} dx; \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos^2 x} dx.$$

Risposte: a) $\frac{1}{4} \log \frac{71}{49}$; b) $\frac{e}{3}$; c) $+\infty$.

Parte B

Esercizio 4. (6 punti)

a) Determinare (se esiste) il valore del limite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3^{1/x} + 5^{1/x}}{2} \right)^x$;

b) Determinare (se esiste) il valore del limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^{1/x} + 5^{1/x}}{2} \right)^x$.

Risposte: a) 5; b) $\sqrt{15}$.

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left| \log \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} \right|.$$

- i) Si stabilisca se f è lipschitziana.
- ii) Si determini, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.

Risposte:

- i) f è lipschitziana;
- ii) L'equazione ha: 2 soluzioni se $\alpha > \log \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, 4 soluzioni se $\alpha = \log \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, 6 soluzioni se $0 < \alpha < \log \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, 3 soluzioni se $\alpha = 0$, nessuna soluzione se $\alpha < 0$.

Esercizio 6. (6 punti) Definiamo $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per ogni numero naturale $n \geq 0$.

(a) Si calcoli, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$.

(b) Si dimostri che

$$\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}} \quad \text{per ogni } k \geq 1.$$

(c) Si dimostri che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$ converge e se ne calcoli la somma.

Risposte:

(a) La successione $\{F_n\}_n$ è monotona crescente, e $F_n > 1$ per $n \geq 2$; sia ℓ il suo limite. Dalla relazione $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ segue che $\ell = 2\ell$. Se ℓ fosse finito, sarebbe $\ell = 0$, contro la monotonia. Dunque $\ell = +\infty$.

(b) Scriviamo

$$\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{F_k}{F_{k-1}F_kF_{k+1}} = \frac{F_{k+1} - F_{k-1}}{F_{k-1}F_kF_{k+1}} = \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}}.$$

Ricordando che $F_n > 1$ per $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{1}{F_0F_1} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} = 1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$