

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini il carattere di due (e non più di due) delle seguenti serie numeriche, stabilendo se si tratta di serie convergenti, divergenti o oscillanti; in caso di convergenza, si precisi se si tratta di convergenza assoluta.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{n^4}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \log n \right); \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Risposte: a) converge assolutamente; b) diverge a $+\infty$; c) diverge a $+\infty$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determinino i valori di due (e non più di due) dei seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sin(\pi x)}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{x^2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x^2 + 2x^4) - 1}{e^{x^4} - 1}.$$

Risposte: a) $\frac{4}{\pi}$; b) 2; c) -8 .

Esercizio 3. (5 punti) Si determini il $\sup \{f(x) : x \in E\}$ in due (e non più di due) dei seguenti casi.

a) $f(x) = \left| |x| - 3 \right|, \quad E = [-5, 5];$

b) $f(x) = \tan(1/x), \quad E = \left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi} \right);$

c) $f(x) = e^{-1/x^2}, \quad E = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Risposte: a) 3; b) $+\infty$; c) 1.

Parte B

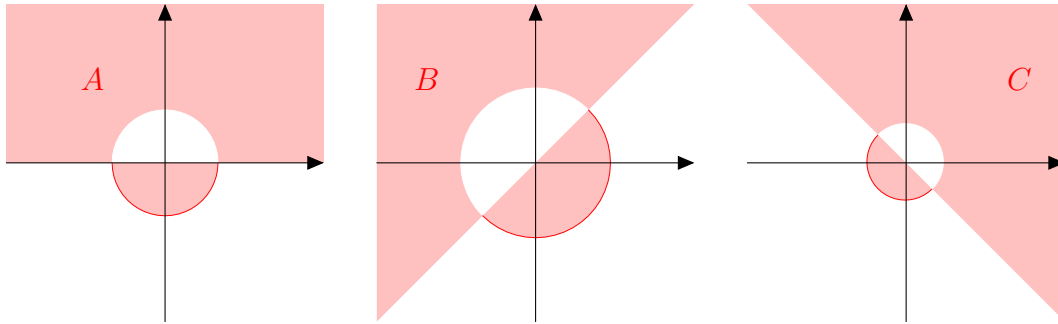
Esercizio 4. (6 punti) Si disegnino sul piano di Argand-Gauss i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Im} \left(z + \frac{1}{z} \right) > 0 \right\},$$

$$B = \{(1+i)z : z \in A\},$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{z} \in B \right\}.$$

Risposte:



Esercizio 5. (6 punti) Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t^4} dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t^4} dt & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \left(3 + x \sin \frac{1}{x}\right) x & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- i) Determinare i punti in cui f è derivabile e la derivata f' .
- ii) Si discuta l'applicabilità del teorema di de l'Hôpital al calcolo del limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- iii) Determinare (se esiste) il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Risposte:

- i) $F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 2e^{-x^8} \operatorname{sgn}(x)$;
- ii) Si tratta della forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Le funzioni f e g sono derivabili in $(0, +\infty)$ e si può verificare che g' non si annulla in un intorno destro di zero. Però il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste quindi non si può applicare il teorema.
- iii) Il limite può essere calcolato applicando prima un asintotico e poi de l'Hôpital:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f(x)}{3x}, \quad \text{per } x \rightarrow 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-x^8} \operatorname{sgn}(x)}{3} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 6. (6 punti) Sia $m \geq 1$, un numero naturale fissato. Per ogni $x \neq 0$ è definita la funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^m}$.

- (a) Si dimostri che è possibile prolungare la funzione f ad una funzione continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $m = 1$.
- (b) Utilizzando il polinomio di Taylor per la funzione esponenziale, si dimostri che esiste un polinomio $P(t)$ a coefficienti reali, tale che

$$\frac{e^x - 1}{x^4} - P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{5!} + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Risposte:

- (a) È sufficiente notare che per $x \neq 0$ è

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \frac{1}{x^{m-1}}$$

- (b) Possiamo scrivere

$$\frac{e^x - 1}{x^4} = \frac{1}{x^4} \left(\sum_{k=1}^5 \frac{x^k}{k!} + o(x^5) \right) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} \frac{1}{x^{4-k}} + \frac{x}{5!} + o(x), \quad x \rightarrow 0$$

Ora b) segue ponendo $P(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{t^{4-k}}{k!}$.