SOLUZIONE

Analisi Matematica I. Prova scritta del **8 aprile 2024**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si scrivano in forma algebrica due (e non più di due) dei seguenti numeri complessi.

$$\text{a) } \frac{5-\mathrm{i}}{7+3\mathrm{i}}; \qquad \text{b) } 1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}^5; \qquad \text{c) } (2-\mathrm{i})^3.$$

Risposte: a) $\frac{16-11\mathrm{i}}{29}$; b) $1+\mathrm{i}$; c) $2-11\mathrm{i}$.

a) $$\frac{5-i}{7+3i}\,\frac{7-3i}{7-3i} = \frac{35-15i-7i-3}{49+9} = \frac{\overset{16}{\cancel{32}} - \overset{11}{\cancel{22}}i}{\underset{29}{\cancel{58}}} = \frac{16}{29} - \frac{11}{29}i$$

b) $$i^5 = (i^4)\cdot i = i \qquad 1-i+2i^5 = 1-i+2i = 1+i$$

c) $$(2-i)^3 = 8 + 3\times 4\times(-i) + 3\times 2\times(-i)^2 + (-i)^3$$
$$= 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$$

Esercizio 2. **(5 punti)** Si determinino i valori di due (e non più di due) dei seguenti limiti:

$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^2}; \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\sqrt{2}}-1}{\sin(x+\pi)}; \qquad \text{c)} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+x^2+2e^x}{5e^{-x}-e^x+\sqrt{x}}.$$

Risposte: a) 0; b) $\sqrt{2}$; c) -2.

a) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right]^x \to \left(\frac{1}{e}\right)^\infty=0 \qquad x\to+\infty$

b) $\dfrac{(1-x)^{\sqrt{2}}-1}{\operatorname{sen}(x+\pi)} \sim \dfrac{-\sqrt{2}x}{-\operatorname{sen} x} \sim \dfrac{\sqrt{2}x}{x}=\sqrt{2} \qquad x\to 0$

c) $\dfrac{e^{-x}+x^2+2e^x}{5e^{-x}-e^x+\sqrt{x}} \sim \dfrac{2e^x}{-e^x}=-2 \qquad x\to+\infty$

Esercizio 3. **(5 punti)** Si calcoli la derivata di f in x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi.

a) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x+1}$, $\quad x_0 = 0$;

b) $f(x) = \log\sqrt{1+\sin^2 x}$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{4}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\, e^{x^2+3x+1}$, $\quad x_0 = -1$.

Risposte: a) 1; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{e\sqrt{2}}$.

a) $$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot(x+1) - \arctan x \cdot 1}{(x+1)^2} \qquad f'(0) = 1$$

b) $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot 2\sin x \cdot \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}} \cdot \cancel{2}\, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}\ \frac{2}{4} = \frac{\cancel{4}}{3\times\cancel{4}} = \frac{1}{3}$$

c) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \cdot e^{x^2+3x+1} + \sqrt{x^2+1}\ e^{x^2+3x+1} \cdot (2x+3)$$

$$f'(-1) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}} \cdot (-\cancel{2}) \cdot e^{-1} + \sqrt{2}\ e^{-1} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{e}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right\} = \frac{1}{e\sqrt{2}} = \frac{1}{e}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot e}$$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

(a) Utilizzando la definizione di convessità, si dimostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$2f(0) \leq f(x) + f(-x).$$

(b) Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si dimostri che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Risposte: (a) Per convessità, risulta $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ per ogni scelta di x_1 e x_2. Scegliendo $x_1 = x$ and $x_2 = -x$, si deduce $2f(0) \leq f(x) + f(-x)$. (b) Da (a) segue che $f(-x) \geq 2f(x) - f(x)$, e facendo tendere $x \to -\infty$ si trova $\lim_{x\to-\infty} f(-x) \geq 2f(0) - \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

a) $x_1 = -x \qquad x_2 = x \qquad t = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}x_2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)x_1\right) \leq \frac{1}{2}f(x_2) + \left(1-\frac{1}{2}\right)f(x_1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) \leq \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2f(0) \leq f(x) + f(-x)$$

b) $f(x) \geq 2f(0) - f(-x) \to +\infty \quad x \to +\infty$

Per il confronto $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$

Esercizio 5. **(6 punti)** Determinare i valori del parametro reale α per i quali la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[2^{-n^2}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}\right]$$

è convergente. **Risposte:** $\alpha \le \log 2$.

$a_n = 2^{-n^2}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}$ criterio della radice

$\sqrt[n]{a_n} = 2^{-n}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2} = 2^{-n}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\right]^n = \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\right]^n$

$\to \left(\frac{e^\alpha}{2}\right)^\infty$ se $e^\alpha \neq 2$ per $n \to +\infty$

- convergente se $\frac{e^\alpha}{2} < 1$ $\quad e^\alpha < 2 \quad \alpha < \ln 2$
- divergente se $\frac{e^\alpha}{2} > 1$ $\quad e^\alpha > 2 \quad \alpha > \ln 2$
- caso $\alpha = \ln 2$ FORMA INDETERMINATA $\left(\frac{e^\alpha}{2}\right)^\infty = 1^\infty$

$\sqrt[n]{a_n} = \exp\{\frac{1}{n}\ln a_n\} = \exp\left\{-n\ln 2 + n^2\ln\left(1+\frac{\ln 2}{n}\right)\right\}$

$= \exp\left\{n\left[-\ln 2 + n\left(\frac{\ln 2}{n} - \frac{(\ln 2)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\right\}$

$= \exp\left\{n\left[-\cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} - \frac{\ln^2 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$

$= \exp\left\{-\frac{\ln^2 2}{2} + o(1)\right\} \to e^{-\frac{\ln^2 2}{2}} < 1$

convergente

Esercizio 6. (6 punti) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}\, dx.$$

Risposte: $\frac{\pi+1}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}\, dx + \int_0^1 \frac{2}{[(x-1)^2+1]^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(x^2-2x+2)}\right]_0^1 + \int_{-1}^0 \frac{2}{[\xi^2+1]^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}\right) + \int_{-1}^0 \frac{2}{[\xi^2+1]^2}\, d\xi = -\frac{1}{4} + \int_{-1}^0 \frac{2}{(1+\xi^2}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{[1+\xi^2]^2}\, d\xi = \int_{-1}^0 \frac{1+\xi^2}{[1+\xi^2]^2}\, d\xi - \int_{-1}^0 \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\, d\xi = [\arctan \xi]_{-1}^0$$

$$+ \left\{ \left[+\frac{1}{2}\frac{\xi}{1+\xi^2}\right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi \right\} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}[\arctan \xi]_{-1}^0$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}\, dx = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\pi$$