Analisi Matematica I. Prova scritta del **25 giugno 2024**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che va **consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si scrivano in forma algebrica due (e non più di due) dei seguenti numeri complessi:

$$\text{a) } \frac{1+3i}{5-i}; \qquad \text{b) } (1-\sqrt{3}i)^{15}; \qquad \text{c) } \frac{\sqrt{3}i}{e^{i\frac{\pi}{4}}} - 2.$$

Risposte: a) $\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i$; b) $-2^{15} = -32768$; c) $(\frac{\sqrt{6}}{2} - 2) + i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

a) $\dfrac{1+3i}{5-i}\,\dfrac{5+i}{5+i} = \dfrac{5+i+15i-3}{25+1} = \dfrac{2+16i}{26} = \dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}i$

b) $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \arg(1-\sqrt{3}i) = \arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

$(1-\sqrt{3}i)^{15} = \left[2\, e^{-\frac{\pi}{3}i}\right]^{15} = 2^{15}\, e^{-5\pi i} = -2^{15}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}i}{e^{\frac{\pi}{4}i}} - 2 = \sqrt{3}i\, e^{-\frac{\pi}{4}i} - 2 = \sqrt{3}i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) - 2$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{2}i + \dfrac{\sqrt{6}}{2} - 2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 2\right) + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

Esercizio 2. (5 punti) Si determinino i valori di due (e non più di due) dei seguenti limiti:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+\log x)}{\log x}; \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{5^x-4^x}; \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\arctan(x)\cdot \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Risposte: a) 1; b) $\frac{\log(3/2)}{\log(5/4)}$; c) $2/\pi$.

a) $$\frac{\log(x+\log x)}{\log x} = \frac{\log x + \log\left(1+\frac{\log x}{x}\right)}{\log x} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{\log x}{x}\right)}{\log x}$$

$$\xrightarrow{x\to+\infty} 1 + \frac{\log 1}{\infty} = 1$$

b) $$\frac{3^x-2^x}{5^x-4^x} = \frac{2^x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right]}{4^x\left[\left(\frac{5}{4}\right)^x-1\right]} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{1\cdot x\log\frac{3}{2}}{1\cdot x\log\frac{5}{4}} = \frac{\log\frac{3}{2}}{\log\frac{5}{4}}$$

c) $$\frac{\log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\operatorname{arctan} x\ \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctan} x\ \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}} \overset{x\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}\ \frac{1}{x}} = \frac{2}{\pi}$$

Esercizio 3. (5 punti) Determinare la derivata destra e sinistra (se esistono, finite o infinite) della funzione f nel punto $x_0 = 0$ per due (e non più di due) delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 + x \log |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = 5 + |x|$;

c) $f(x) = e^{\arctan(x+1)}$.

Risposte: a) $f'_-(0) = f'_+(0) = -\infty$; b) $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$; c) $f'_-(0) = f'_+(0) = f'(0) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

a) $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \log|x| \xrightarrow[x \to 0^\pm]{} -\infty \qquad f'_+(0) = f'_-(0) = -\infty$

b) $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x \qquad f'_+(0) = 1 \qquad f'_-(0) = -1$

c) Derivabile in $x_0 = 0$ $\quad f'(x) = e^{\arctan(x+1)} \dfrac{1}{1 + (x+1)^2}$

$f'(0) = e^{\arctan 1} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} = f'_+(0) = f'_-(0)$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Sia $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}.$$

(a) Si determinino

$$\inf_{(0,2)} f \quad \text{e} \quad \sup_{(0,2)} f.$$

(b) Si stabilisca se f è lipschitziana.

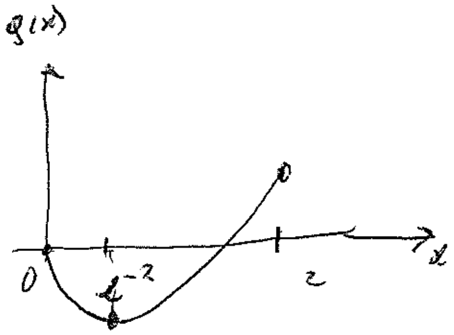
(c) Si stabilisca se f è uniformemente continua.

Risposte: (a) $\inf_{(0,2)} f = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$, $\sup_{(0,2)} f = 2^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$. (b) f non è lipschitziana. (c) f è uniformemente continua.

a) Studiamo $\log f(x) = \log\left[(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\right] = \sqrt{x}\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\log x = g(x)$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\log 2 \qquad g'(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right\}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} > 0 \iff \log x > -2 \iff x > e^{-2}$



Ha minimo in $x = e^{-2}$

Essendo il logaritmo monotono,

$\inf f = \min f = f(e^{-2}) = [e^{-1}]^{e^{-1}} = \frac{1}{e^{1/e}}$

$\sup f = \lim_{x\to 2} f(x) = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{g(x)} = 1$ $\quad f$ può essere prolungata con continuità sull'intervallo chiuso $[0,2]$ $\Rightarrow$ è uniformemente continua.

b) $f'(x) = \frac{d}{dx} e^{g(x)} = e^{g(x)} g'(x) \xrightarrow{x\to 0^+} e^0 \cdot (-\infty) = -\infty$

NON E' LIPSCHITZIANA poiché la derivata è illimitata.

Esercizio 5. (6 punti) Siano α e β due numeri reali. Si consideri la successione

$$a_n = e^\alpha - \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

(a) Per quali valori di α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente?

(b) Per quali valori di α e β la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{\beta}{n}\right)$ è convergente?

Risposte: (a) $\alpha = 0$. (b) α qualunque e $\beta = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{2}$.

a) $a_n = e^\alpha - \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to+\infty} e^\alpha - e^\alpha = 0$ cond. necessaria soddisfatta

$$a_n = e^\alpha - e^{n\log\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)} = e^\alpha - e^{n\left[\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}$$

$$= e^\alpha - e^{\alpha - \frac{\alpha^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = -e^\alpha\left(e^{-\frac{\alpha^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

$$\sim -e^\alpha\left(-\frac{\alpha^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\alpha\neq 0}{\sim}} e^\alpha \frac{\alpha^2}{2n}$$ Termine generale di serie non convergente

$\Rightarrow \alpha \neq 0$ NON CONVERGE

SE $\alpha = 0$ $a_n = 1 - 1 = 0$ CONVERGE

b) Occorre sviluppare un ordine superiore

$$a_n - \frac{\beta}{n} = e^\alpha - e^{n\left[\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^3}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]} - \frac{\beta}{n}$$

$$= e^\alpha - e^{\alpha - \frac{\alpha^2}{2n} + \frac{\alpha^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{\beta}{n}$$

$$= -e^\alpha\left[e^{-\frac{\alpha^2}{2n} + \frac{\alpha^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1\right] - \frac{\beta}{n}$$

$$= -e^\alpha\left[-\frac{\alpha^2}{2n} + \frac{\alpha^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{4n^2}\right] - \frac{\beta}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{e^\alpha \alpha^2}{2} - \beta\right] - \frac{1}{n^2}\left[\frac{\alpha^3}{3}e^\alpha + \frac{\alpha^4}{8}\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Termine generale di serie convergente solo se $\frac{e^\alpha \alpha^2}{2} - \beta = 0$

$$\Rightarrow \beta = \frac{e^\alpha \alpha^2}{2}$$

Esercizio 6. **(6 punti)** Determinare al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ l'esistenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)\cdot \arctan(x^{-\alpha})}{\sqrt{|x-\alpha|}}\, dx.$$

Risposte: $\alpha < -\frac{1}{2}$ e $\alpha > \frac{1}{2}$.

Sia $f(x) = \dfrac{\log(1+x^\alpha)\cdot \arctan(x^{-\alpha})}{\sqrt{|x-\alpha|}}$

- $\alpha = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\log 2 \;\; \frac{\pi}{4}}{\sqrt{x}}$ $\quad$ non integrabile in $+\infty$

- $\alpha > 0$ $\quad f(x) \overset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x^\alpha \;\; \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\alpha}}$ $\quad$ integrabile

$$f(x) \overset{x\to\alpha}{\sim} \frac{\log(1+\alpha^\alpha)\arctan \alpha^{-\alpha}}{\sqrt{|x-\alpha|}} \quad \text{integrabile in } x=\alpha$$

$$f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha \log x \cdot x^{-\alpha}}{x^{1/2}} = \alpha \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}\log^{-1} x}$$

integrabile $\iff \frac{1}{2}+\alpha > 1$ $\quad \boxed{\alpha > \frac{1}{2}}$

- $\alpha < 0$ $\quad f(x) \overset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\alpha \log x \cdot x^{-\alpha}}{\sqrt{|\alpha|}} \xrightarrow{x\to 0^+} 0$ $\quad$ integrabile

$$f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^\alpha \;\; \frac{\pi}{2}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

integrabile $\iff \frac{1}{2}-\alpha > 1$ $\quad \alpha < \frac{1}{2} - 1$

$$\boxed{\alpha < -\frac{1}{2}}$$