Analisi Matematica I. Prova scritta del 17 luglio 2024

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che va **consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

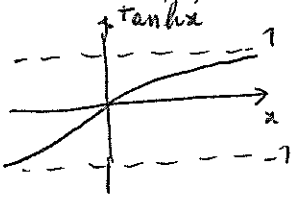
Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determinino estremo superiore ed estremo inferiore, discutendo se sono anche massimo e minimo, di due (e non più di due) dei seguenti insiemi:

a) $A = \left\{(-1)^n \tanh n : n \in \mathbb{N}\right\}$;   b) $B = \left\{x^3 - 3x^2 : x \in [0,3]\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n \text{ converge}\right\}$.

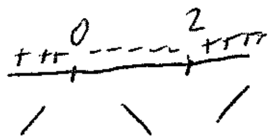
Risposte: a) $\inf A = -1$ (non è minimo), $\sup A = 1$ (non è massimo); b) $\inf B = \min B = -4$, $\sup B = \max B = 0$; c) $\inf C = -\frac{1}{2}$ (non è minimo), $\sup C = +\infty$ (non esiste massimo).

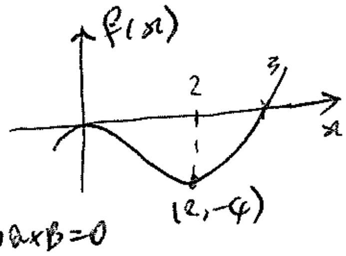
a) 

$|\tanh x| = \left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A \subset (-1,1)$

- $\lim_{k\to+\infty} (-1)^{2k} \tanh(2k) = 1 \quad (n = 2k)$
- $\lim_{k\to+\infty} (-1)^{2k+1} \tanh(2k+1) = -1 \quad (n = 2k+1)$

quindi $\inf A = -1$ NON è MINIMO $\sup A = 1$ NON è massimo.

b) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ $\quad f'(x) > 0$ 

$f(0) = f(3) = 0 \quad f(2) = -4$ 

$f([0,3]) = [-4, 0] = B$

$\inf B = \min B = -4 \quad \sup B = \max B = 0$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ CONVERGE $\Leftrightarrow \left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$

$\Leftrightarrow \left|1 - \frac{1}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow -2 < -\frac{1}{x+1} < 0$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$\Rightarrow C = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ $\quad \inf C = -\frac{1}{2}$ non è minimo $\quad \sup C = +\infty$ Non c'è Massimo

Esercizio 2. **(5 punti)** Si determini il carattere (convergente, divergente o indeterminato) di due (e non più di due) delle seguenti serie numeriche:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}}; \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right); \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}}.$$

Risposte: a) divergente; b) divergente; c) convergente.

a) $\dfrac{\overbrace{(n+1)}^{\geq n}\overbrace{(2+\operatorname{sen} n)}^{\geq 1}}{\sqrt[3]{n^5}} \geq \dfrac{n \cdot 1}{n^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ poiché $\frac{2}{3} \leq 1$ e $\frac{1}{n^{2/3}}$ è il termine generale di una serie divergente. Per il confronto anche la serie data è divergente.

b) $n - n\cos\frac{1}{n} = n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} n\,\dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{1}{2n}$ termine generale di serie divergente. Per il criterio dell'asintotico, anche la serie data è divergente

c) $\sqrt[7]{\dfrac{n^6+n^3}{n^{15}+1}} \sim \sqrt[7]{\dfrac{1}{n^9}} = \dfrac{1}{n^{9/7}}$ poiché $\frac{9}{7} > 1$, $\frac{1}{n^{9/7}}$ è il termine generale di serie convergente. Quindi per il criterio dell'asintotico anche la serie data è CONVERGENTE.

Esercizio 3. **(5 punti)** Si calcoli il valore di due e non più di due dei seguenti integrali (propri o impropri):

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\, dx, \qquad \text{c)} \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx.$$

a) -3, *b)* $\frac{5}{6}$, *c)* $\frac{1}{3}$.

a) $$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\, dx = \int_0^1 \left(x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{-\frac{2}{3}+1} x^{-\frac{2}{3}+1} - 3\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \left[3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 3-6=-3$$

b) $$\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\, dx = \int_0^1 \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}\, dx = \int_0^1 (x^2-x+1)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{2-3+6}{6} = \frac{5}{6}$$

c) $$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M x^2 e^{-x^3}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{3} e^{-x^3} \right]_0^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{3} e^{-M^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti)

(a) Si dimostri che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

(b) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \left(\arctan \sqrt[3]{x+1} - \arctan \sqrt[3]{x-1} \right).$$

(c) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\arctan \sqrt[3]{n+1} - \arctan \sqrt[3]{n-1} \right).$$

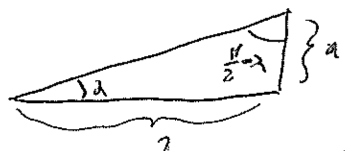
Risposte: (a) Derivando la funzione $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, si ottiene che $f'(x) = 0$ per ogni x appartenente all'intervallo $(0, +\infty)$. Quindi $f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. (b) Il limite vale $\frac{2}{3}$ se $\alpha = \frac{4}{3}$, $+\infty$ se $\alpha > \frac{4}{3}$, 0 se $\alpha < \frac{4}{3}$. (c) La serie converge.

a) $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ per $x>0$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$

È costante su $(0,+\infty)$ MA $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in (0,+\infty)$

OPPURE: $\alpha = \arctan x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$

Quindi $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan \frac{1}{x}$



$\tan \alpha = x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{x}$

b) Per Lagrange $\exists\, \theta(x)$ tale che $\sqrt[3]{x-1} < \theta(x) < \sqrt[3]{x+1}$ e

$$\arctan \sqrt[3]{x+1} - \arctan \sqrt[3]{x+1} = \frac{1}{1+\theta(x)^2} \left[\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \right]$$

Ma $1 < \frac{\theta(x)}{\sqrt[3]{x-1}} < \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ per il confronto $\theta(x) \sim \sqrt[3]{x-1} \sim x^{\frac{1}{3}}$

Quindi $x^{\alpha}\left(\arctan \sqrt[3]{x+1} - \arctan \sqrt[3]{x-1}\right) = \frac{x^{\alpha}}{1+\theta(x)^2} \sqrt[3]{x-1} \left[\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right]$

$$\underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha}}{x^{2/3}} x^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x-1}} - 1 \right] \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\alpha}} \frac{1}{3} \frac{2}{x-1} \sim \frac{2}{3} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}-\alpha}} \to \begin{cases} +\infty, & \alpha > \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}, & \alpha = \frac{4}{3} \\ 0, & \alpha < \frac{4}{3} \end{cases}$$

c) usando il punto b) con $\alpha = 0$ si ha

$\arctan \sqrt[3]{n+1} - \arctan \sqrt[3]{n-1} \sim \frac{2}{3} \frac{1}{n^{4/3}}$ poiché $\frac{4}{3} > 1$, $\frac{2}{3} \frac{1}{n^{4/3}}$ è il termine generale di serie convergente quindi anche la serie data converge per il criterio dell'asintotico.

Esercizio 5. (6 punti) Per ogni $z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$Q(z) = |z| + \left|\frac{z^2-1}{z}\right| + \left|\frac{z^2+1}{z}\right|.$$

(a) Si determini il valore $\inf\{Q(z) \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

(b) Si determini il valore $\sup\{Q(z) \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

Risposte: (a) 3. (b) $1 + 2\sqrt{2}$.

Se $|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$ $\quad \theta \in \mathbb{R}$

$$Q(e^{i\theta}) = |e^{i\theta}| + \left|e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right| + \left|e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right|$$

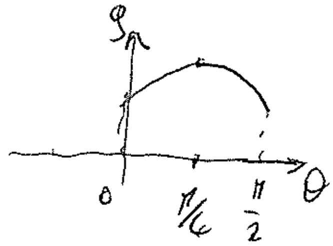
$$= 1 + |e^{i\theta} - e^{-i\theta}| + |e^{i\theta} + e^{-i\theta}|$$

$$= 1 + 2|\operatorname{sen}\theta| + 2|\cos\theta| = g(\theta)$$

Periodica di periodo π e PARI, basta studiarla in $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad g(\theta) = 1 + 2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = 1 + 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\right]$

$$= 1 + 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$



ha massimo in $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad g(\frac{\pi}{4}) = 1 + 2\sqrt{2}$

minimo in $\theta = 0$ $\quad g(0) = 1 + 2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 3$

Esercizio 6. **(6 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Studiarne la continuità e derivabilità, determinandone la derivata dove esiste.

b) Determinarne l'estremo superiore e inferiore specificando se si tratta anche di massimo/minimo.

c) È uniformemente continua? La sua restrizione a $(0, +\infty)$, $g = f\big|_{(0,+\infty)}$ è Lipschitziana?

Soluzione:

a)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \qquad f(0) = 0.$$

Quindi nel punto $x = 0$, la funzione presenta una discontinuità di salto, di conseguenza in tale punto non è nemmeno derivabile. In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è continua e derivabile essendo composizione di funzioni derivabili.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot 2x = -\frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{1 + x^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

b) In $(-\infty, 0)$ la funzione è costante. Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $f(0) = 0$, si ha $f(x) = 0\ \forall x \in (-\infty, 0]$. In $(0, +\infty)$ la funzione è strettamente decrescente, per cui l'estremo superiore della funzione è $S = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi$ ma non è un massimo poiché $f(0) = 0$. L'estremo inferiore è $s = 0$ ed è un minimo, i punti di minimo sono tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ con $x \leq 0$.

c) La funzione f non è continua su $\mathbb{R}$ e quindi a maggior ragione non è uniformemente continua. Ristretta a $(0, +\infty)$ è derivabile con derivata $|f'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ limitata e quindi è Lipschitziana.

Osservazione: Lo studio della funzione può essere semplificato ricordando le identità trigonometriche

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan|x|\right) \cdot \operatorname{sgn}(x), \qquad \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan|x|,$$

per cui

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \pi - 2\arctan x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$