Analisi Matematica I. Prova scritta del **19 settembre 2024**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che va consegnato **anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determinini la derivata di due (e non più di due) delle seguenti funzioni nel punto $x_o = -1$:

a) $f(x) = x \cdot |x|$; b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$; c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left((x+1)^2\right)}{x+1} & \text{per } x \neq -1 \\ 0 & \text{per } x = -1. \end{cases}$

Risposte: a) $f'(-1) = 2$; b) $f'(-1) = \frac{1}{2}$; c) $f'(-1) = 1$.

a) $f'(x) = |x| + x\,\mathrm{sgn}(x) = 2|x| \Rightarrow f'(-1) = 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \cancel{2}x$

$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2-1}}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x = -\frac{(1+x^2)^{-1}}{|x|}x$

$f'(-1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{|-1|} = \frac{1}{2}$

c) $f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{sen}\left((-1+h+1)^2\right)}{(-1+h+1)} - 0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, h^2}{h^2} = 1$

Esercizio 2. **(5 punti)** Si risolvano in $\mathbb{C}$ due (e non più di due) delle seguenti equazioni:

$$\text{a) } z^2 - i\bar{z} = 1; \qquad \text{b) } (z-i)^2 = (\sqrt{3}-i)^3; \qquad \text{c) } |z|^2 + 4z + 4i = 0.$$

Risposte: a) $\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{i}{2}$; b) $2-i$, $-2+3i$; c) $-2-\sqrt{3}-i$, $-2+\sqrt{3}-i$.

a) $z = x + iy \qquad z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

$x^2 + 2ixy - y^2 - i(x - iy) = 1$

$x^2 - y^2 - y + i(2xy - x) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 - y = 1 \\ x(2y-1) = 0 \end{cases}$

- $x = 0 \qquad y^2 + y + 1 = 0 \qquad \Delta = -1 - 4 = -5 < 0$ NESS. SOL
- $y = \frac{1}{2} \qquad x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 1 \qquad x^2 = \frac{4+2+1}{4} = \frac{7}{4} \qquad x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

$z_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} + i\frac{1}{2} \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2} + i\frac{1}{2}$

b) $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} \qquad (\sqrt{3}-i)^3 = (2e^{-\frac{\pi}{6}i})^3 = 8e^{-\frac{\pi}{2}i}$

Le radici quadrate di $8e^{-\frac{\pi}{2}i}$ sono w_0, w_1 date da

$w_k = \sqrt{8}\, e^{\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}\right)i} = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{-\pi + 4k\pi}{4}i} \qquad k = 0, 1$

$w_0 = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2 - 2i$

$w_1 = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{5}{4}i} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2 + 2i$

$z_0 - i = 2 - 2i \qquad \boxed{z_0 = 2 - i} \qquad z_1 - i = -2 + 2i \qquad \boxed{z_1 = -2 + 3i}$

c) $z = x + iy \qquad |z|^2 = x^2 + y^2 \qquad x^2 + y^2 + 4x + i4y + 4i = 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ 4(y+1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x + 1 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad x = -2 \pm \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3}$

$z_1 = -2 - \sqrt{3} - i \qquad z_2 = -2 + \sqrt{3} - i$

Esercizio 3. (5 punti) Si calcoli il valore di due e non più di due dei seguenti integrali (propri o impropri):

$$\text{a)}\quad \int_0^2 \frac{x+1}{x^2+4}\,dx, \qquad \text{b)}\quad \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(2x)\,dx, \qquad \text{c)}\quad \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{3}\right) e^{-x}\,dx.$$

a) $\frac{\pi}{8}+\frac{\log 2}{2}$, *b)* 0, *c)* $\frac{3}{10}$.

a) $$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{2x}{x^2+4}+\frac{2}{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{2}\left\{\left[\log(x^2+4)\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{4}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{8}{4} + \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot 2\cdot d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{8}$$

b) $f(x) = x\cos(2x)$ $\quad f(-x) = (-x)\cos(-2x) = -[x\cos(2x)] = -f(x)$

Funzione dispari integrata su dominio simmetrico rispetto all'origine $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(2x)\,dx = 0$

c) $$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)e^{-x}\,dx = \underbrace{\left[-\operatorname{sen}\frac{x}{3}\cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\cos\frac{x}{3}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{1}{3}\left\{\left[-\cos\frac{x}{3}\cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\operatorname{sen}\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-x}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}\frac{x}{3}\,e^{-x}\,dx\right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}\frac{x}{3}\cdot e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{10}{9}\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}\frac{x}{3}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}\frac{x}{3}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{3}{10}$$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e}$, non è massimo.

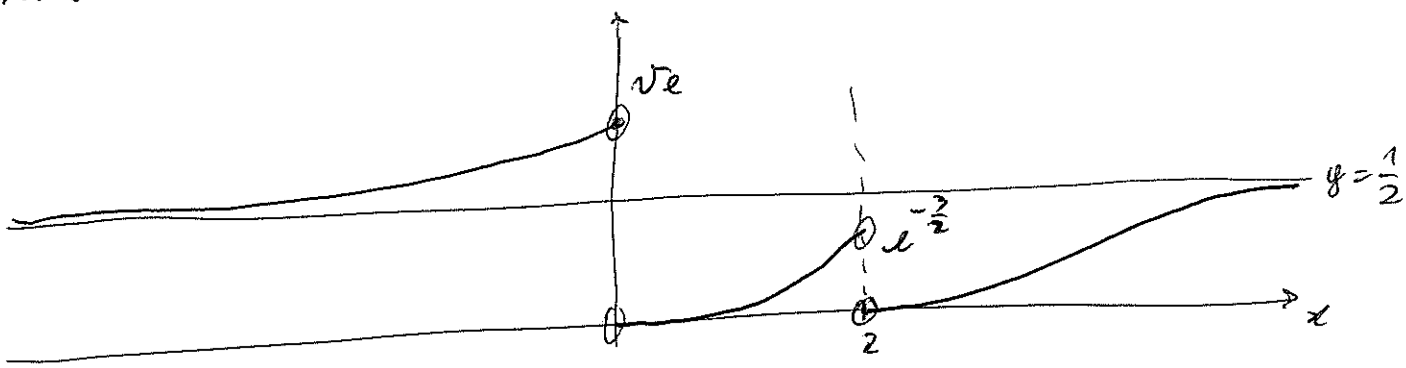
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{e^0 + e^0} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\infty}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}} + e^{+\infty}} = 0 \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{e^{-\infty} + e^{\frac{3}{2}}} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{e^{+\infty} + e^{\frac{3}{2}}} = 0 \qquad g(x) = e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{g^2(x)} \left[e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right) + e^{\frac{3}{x}} \cdot \left(-\frac{3}{x^2} \right) \right] > 0 \quad \forall x \neq 0, 2$$

SEMPRE CRESCENTE STRETTAMENTE



$D = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \sqrt{e})$

a) $\inf D = 0$ Non è minimo

b) $\sup D = \sqrt{e}$ Non è massimo

Esercizio 5. **(6 punti)** Si considerino le due funzioni

$$f(x) = \frac{2e^{x^2} + 4\cos x - 6 + 3x\log(1+x)}{\log(1+x^2)}, \qquad g(x) = (1+x)^{\frac{5}{x}}, \qquad x > -1, \quad x \neq 0.$$

(a) Si determini il limite $\alpha = \lim_{x\to 0} f(x)$;

(b) Si determini il limite $\beta = \lim_{x\to 0} g(x)$;

(c) Si determini il limite $\gamma = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-\alpha}{g(x)-\beta}$.

Risposte: (a) 3; (b) e^5; (c) $\frac{3e^{-5}}{5}$.

a) $$f(x) = \frac{2(e^{x^2}-1)}{\log(1+x^2)} + \frac{-4(1-\cos x)}{\log(1+x^2)} + \frac{3x\log(1+x)}{\log(1+x^2)} \xrightarrow{x\to 0} 2-2+3=3$$

b) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^5 = e^5$$

c) $$\frac{2e^{x^2}+4\cos x-6+3x\log(1+x)}{\log(1+x^2)} - 3$$

$$= \frac{2(\cancel{1}+x^2+o(x^3)) + 4(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \cancel{-6} + 3x\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - 3\left(x^2+o(x^3)\right)}{\log(1+x^2)}$$

$$\sim \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + \cancel{3x^2} - \frac{3}{2}x^3 - \cancel{3x^2} + o(x^3)}{x^2} \sim \frac{-\frac{3}{2}x^3}{x^2} = -\frac{3}{2}x$$

$$(1+x)^{\frac{5}{x}} - e^5 = e^5\left[e^{-5}e^{\frac{5}{x}\log(1+x)} - 1\right] = e^5\left[e^{\overbrace{5\left(\frac{1}{x}\log(1+x)-1\right)}^{\to 0 \text{ per } x\to 0}} - 1\right]$$

$$\overset{x\to 0}{\sim} e^5\, 5\left(\frac{1}{x}\log(1+x)-1\right) = e^5\,\frac{5}{x}\left(\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{x}\right)$$

$$= 5e^5\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right) \sim -\frac{5}{2}e^5 x$$

$$\frac{f(x)-\alpha}{g(x)-\beta} \sim \frac{-\frac{3}{2}x}{-\frac{5}{2}e^5 x} = \frac{3}{5}e^{-5}$$

Esercizio 6. **(6 punti)** Si discuta, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\,\alpha^{2n} + \alpha\, n^{3\alpha} \right).$$

Soluzione: la serie converge per $\alpha \in (-1, -\frac{1}{3}) \cup \{0\}$, diverge a $+\infty$ per $\alpha \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$, diverge a $-\infty$ per $\alpha \in [-\frac{1}{3}, 0)$.

- Se $\alpha \geq 1$ $\quad n\alpha^{2n} + \alpha n^{3\alpha} \to +\infty + \alpha = +\infty$ serie divergente a $+\infty$
- Se $0 < \alpha < 1$ $\quad n\alpha^{2n} + \alpha n^{3\alpha} \to 0 + \infty = +\infty$ serie divergente a $+\infty$
- Se $\alpha = 0$ $\quad n\alpha^{2n} + \alpha n^{3\alpha} = 0$ serie convergente a 0
- Se $-\frac{1}{3} \leq \alpha < 0$ $\quad n\alpha^{2n} = o(\alpha n^{3\alpha})$ per cui $n\alpha^{2n} + \alpha n^{3\alpha} \sim \alpha n^{3\alpha}$

  con $3\alpha \in (-1, 0)$ termine generale di serie divergente

  $\Rightarrow$ diverge a $-\infty$ essendo $\alpha < 0$
- Se $-1 < \alpha < -\frac{1}{3}$ $\quad n\alpha^{2n} = o(\alpha n^{3\alpha})$ per cui $n\alpha^{2n} + \alpha n^{3\alpha} \sim \alpha n^{3\alpha}$

  Ma stavolta $3\alpha \in (-3, -1)$ termine generale

  di serie convergente, quindi <u>converge</u>.
- Se $\alpha \leq -1$ $\quad n\alpha^{2n} + \alpha n^{3\alpha} \sim n\alpha^{2n} \to +\infty$

  Quindi diverge a $+\infty$