Analisi Matematica I. Prova scritta del 29 gennaio 2025

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini il carattere di due (e non più di due) delle seguenti serie numeriche:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^3+2}{1+n^2+n^3}; \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{2^4}\right)^n; \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{(2n)!}$$

Risposte: a) divergente; b) convergente; c) convergente.

a) $\frac{3n^3+2}{1+n^2+n^3} > 0$ a termini positivi. $\frac{3n^3+2}{1+n^2+n^3} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{3n^3}{n^3} = 3 \neq 0$

Diverge a $+\infty$

b) $(-1)^n \left(\frac{5}{2^4}\right)^n = \left(-\frac{5}{2^4}\right)^n$ serie geometrica di ragione

$q = -\frac{5}{2^4}$ MA $|q| = \frac{5}{2^4} < 1 \Rightarrow$ CONVERGE

c) $a_n = \frac{5^n}{(2n)!}$ criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{\cancel{5^n}} = 5 \frac{\cancel{(2n)!}}{2(n+1) \cdot (2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{5}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{5}{4n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1$$

$\Rightarrow$ CONVERGE.

Esercizio 2. (5 punti) Si scelgano due (e non più di due) tra i seguenti limiti, determinandone il valore o eventualmente dimostrandone la non esistenza del limite.

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{2x^3+3x^2}; \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sin x+1}{x^2+2}; \qquad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sin x+1}{x^3+2}.$$

Risposte: a) $\frac{1}{6}$; b) Non esiste. Basta valutare la funzione argomento del limite nelle due successioni $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y_n = n\pi$ e usare il teorema ponte; c) 0.

a) $$\frac{\sin(1-\cos x)}{2x^3+3x^2} \sim \frac{1-\cos x}{3x^2} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

b) $$f(x) = \frac{x^2 \sin x + 1}{x^2+2} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2+1}{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2+2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{4n^2\pi^2}{4n^2\pi^2} = 1$$

$$f(n\pi) = \frac{1}{(n\pi)^2+2} \sim \frac{1}{n^2\pi^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Per il teorema ponte se il limite esistesse i limiti delle 2 successioni dovrebbero coincidere, quindi il limite non esiste

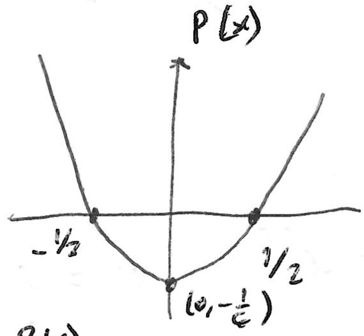
c) $$0 \le \frac{|x^2 \sin x + 1|}{|x^3+2|} \le \frac{x^2|\sin x|+1}{x^3+2} \le \frac{x^2+1}{x^3+2} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

Per il teorema del confronto il limite è zero.

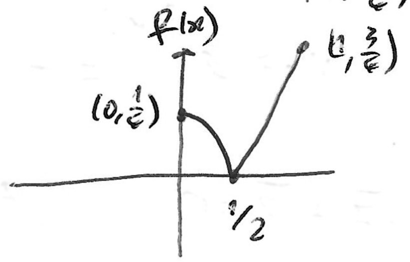
Esercizio 3. (5 punti) Per due (e non più di due) delle seguenti funzioni, si deteminino il **valore** di minimo assoluto e di massimo assoluto nell'intervallo $[0,1]$:

$$\text{a)}\quad f(x) = \left|x^2 - \frac{1}{4}\right|, \qquad \text{b)}\quad g(x) = x + \left|x - \frac{1}{2}\right|, \qquad \text{c)}\quad h(x) = |\sin|x||.$$

a) 0, $\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, c) 0, $\sin 1$.



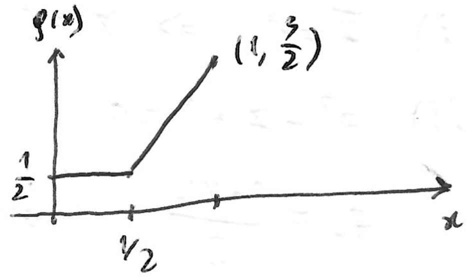
a) $p(x) = x^2 - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$



$f(x) = |x^2 - \frac{1}{4}| = |p(x)|$

MINIMO: 0 MASSIMO: $\frac{3}{4}$

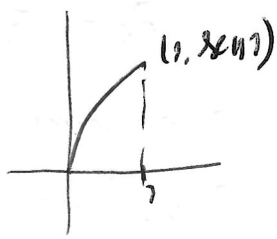
b)
$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} & x < \frac{1}{2} \\ x + x - \frac{1}{2} = 2x - \frac{1}{2} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



MINIMO: $\frac{1}{2}$ MASSIMO: $\frac{3}{2}$

c) Se $x \in [0,1]$ $|x| = x$ e $|\text{sen}\,|x|| = |\text{sen}\,x| = \text{sen}\,x$

$\Rightarrow h(x) = |\text{sen}\,|x|| = \text{sen}\,x \quad \forall x \in [0,1]$



MINIMO: 0

MASSIMO: sen 1

Parte B

Esercizio 4. (6 punti)

(a) Si trovino le soluzioni $w \in \mathbb{C}$ dell'equazione $w^3 - 1 = 0$.

(b) Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^2\bar{z} - z\bar{z} = -\bar{z}$.

(c) Risolvere in campo complesso il seguente sistema: $\begin{cases} z^2\bar{z} - z\bar{z} = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1. \end{cases}$

Risposta: (a) $\left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; (b) $\left\{0, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; (c) $\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

a) $w^3 = 1 = e^{0 \cdot i}$ $\qquad w_k = \exp\left\{\left[\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right]i\right\}$ $\quad k = 0, 1, 2$

$w_0 = e^0 = 1 \qquad w_1 = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad w_2 = e^{\frac{4}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z^2 \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{z} + \bar{z} = 0 \qquad (z^2 - z + 1) \cdot \bar{z} = 0$

i) $\bar{z} = 0 \Rightarrow z = 0$

ii) $z^2 - z + 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 = -3$

$z_k = \frac{1 + w_k}{2}$ con w_0, w_1 radici di $\Delta = -3 = 3e^{\pi i}$

$w_k = \sqrt{3}\exp\left\{\left[\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}k\right]i\right\} \qquad w_0 = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt{3}i$

$w_1 = \sqrt{3}e^{\frac{3}{2}\pi i} = -\sqrt{3}i$

$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $z = 0$ non può essere soluzione della seconda equazione

Prendiamo le altre 2 soluzioni $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ e

vediamo se risolvono la 2ª equazione

$\left[\left(e^{\pm\frac{\pi}{3}i}\right)^3 + \left(e^{\mp\frac{\pi}{3}i}\right)\right]^3 = \left[e^{\pm\pi i} + \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^3$

$= \left[-1 + \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^3 = \left[-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^3 = \left[e^{\mp\frac{2}{3}\pi i}\right]^3$

$= e^{\mp 2\pi i} = 1$ sì, quindi sono soluzioni del sistema.

Esercizio 5. (6 punti)

(a) Si determini l'integrale indefinito $\int \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$, per $x \neq 0$;

(b) Si determinino $A,\ B \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x}$ sia integrabile in senso improprio in $(0,1)$. [Sugg.: può essere utile ricordare che $\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x,\ \forall x > 0$]

(c) Per i valori di A e B determinati nel punto $b)$ si calcoli l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Risposte: (a) $-\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + C$, $x \neq 0$; (b) $A = -\frac{\pi}{2}$, $B = 1$; (c) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 - 1$.

a) $$\int \frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{x}\,dx = \int -\arctan t \cdot dt = -t\arctan t - \int -t\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$\boxed{\frac{1}{x} = t \qquad dt = -\frac{1}{x^2}dx}$

$$= -t\cdot\arctan t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + c$$

b) $$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan x\right] + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+A\right) - \frac{1}{x^2}\left[x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right] + \frac{B}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2}+A\right) + \frac{1}{x}\cdot(B-1) + o(x^2)$$

poiché sia $\frac{1}{x^2}$ che $\frac{1}{x}$ non sono integrabili in $x=0$ f è integrabile solo se $A = -\frac{\pi}{2}$ e $B=1$, in tal caso $f(x) \to 0$ per $x \to 0$

c) $$\int_0^1 \left[\frac{1}{x^2}\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right]dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi}{2}\frac{1}{x} + \ln x\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\arctan\varepsilon = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - 1$$

Esercizio 6. (6 punti) Sono definite le funzioni

$$f(x) = \log(x+2) - \cos(x^2) - \frac{x}{2}, \quad g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sin x + \frac{x}{2} - \cos(3x).$$

(a) Si calcolino $\alpha = \lim_{x\to 0} f(x)$ e $\beta = \lim_{x\to 0} g(x)$.

(b) Si calcoli $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \alpha + \frac{x^2}{8}}{g(x) - \beta - \frac{9}{2}x^2}$.

Soluzione: (a) $\alpha = -1 + \log 2$, $\beta = -1$. (b) $\frac{1}{5}$. Infatti

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log(2) - 1) - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + O\left(x^4\right) \\ g(x) &= -1 + \frac{9x^2}{2} + \frac{5x^3}{24} + O\left(x^4\right). \end{aligned}$$

a) $f(x) \xrightarrow{x\to 0} \ln 2 - 1 = \alpha \quad g(x) \xrightarrow{x\to 0} -1 = \beta$ senza forme indeterminate

b) $f(x) = \ln(x+2) - \cos x^2 - \frac{x}{2} = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \cos x^2 - \frac{x}{2}$

$= \ln 2 + \cancel{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)$

$-\left(1 + o(x^3)\right) - \cancel{\frac{x}{2}} = \ln 2 - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{24}x^3 - 1 + o(x^3)$

$g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen} x + \frac{x}{2} - \cos(3x)$

$= \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) - \left(\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \cancel{\frac{x}{2}} - \left(1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^3)\right)$

$= -1 + \frac{9}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^3)$

$= -1 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)$

$$\frac{f(x) - \alpha + \frac{x^2}{8}}{g(x) - \beta - \frac{9}{2}x^2} = \frac{\cancel{\ln 2} \cancel{-1} - \cancel{\frac{x^2}{8}} + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3) - \cancel{\ln 2} \cancel{+1} + \cancel{\frac{x^2}{8}}}{\cancel{-1} + \cancel{\frac{9}{2}x^2} + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3) \cancel{+1} - \cancel{\frac{9}{2}x^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{24}x^3 + o(x^3)}{\frac{5}{24}x^3 + o(x^3)} \sim \frac{\frac{1}{24}x^3}{\frac{5}{24}x^3} = \frac{1}{5}$$