Analisi Matematica I. Prova scritta del **19 febbraio 2025**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (**che va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* ogni risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Per due (e non più di due) delle seguenti funzioni si calcoli la derivata nel punto $x_0 = 0$:

$$\text{a)}\quad f(x) = \frac{\arctan(x^2+1)}{\cos(2x)}; \qquad \text{b)}\quad g(x) = \log\left(\frac{x-3}{x^2-1}\right); \qquad \text{c)}\quad h(x) = (x^3+1)\,e^{-x^4+1}.$$

Risposte: a) 0; b) $-\frac{1}{3}$; c) 0.

a) $f(x) = \dfrac{\arctan(x^2+1)}{\cos(2x)}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+[x^2+1]^2} \cdot 2x \cdot \dfrac{1}{\cos(2x)}$

$+ \arctan(x^2+1) \cdot (-1)\cos(2x)^{-2} \cdot [-\operatorname{sen}(2x)] \cdot 2$

$f'(0) = 0 + 0 = 0$

b) $g(x) = \log \dfrac{x-3}{x^2-1}$ $\qquad g'(x) = \dfrac{1}{\frac{x-3}{x^2-1}} \cdot \dfrac{1\cdot(x^2-1)-(x-3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$g'(0) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{-1+0}{1} = -\dfrac{1}{3}$

c) $h(x) = (x^3+1)\,e^{-x^4+1}$

$h'(x) = 3x^2 e^{-x^4+1} + (x^3+1)\,e^{-x^4+1} \cdot (-4x^3)$

$h'(0) = 0$

Esercizio 2. **(5 punti)** Si determini il carattere di due (e non più di due) delle seguenti serie.

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}.$$

Risposte: a) divergente a $+\infty$; b) divergente a $+\infty$; c) convergente.

a) $a_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n-\sqrt{n}} > 0 \quad \forall n \geq 2$

$a_n \sim \dfrac{1}{n}$ termine generale di serie divergente

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n = +\infty$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\sqrt{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n}} \to e^{\infty} = +\infty.$

Il termine generale non tende a zero $\Rightarrow$ la serie diverge

c) $a_n = \dfrac{1}{n^{3-\cos\frac{1}{n}}} > 0 \qquad 3-\cos\frac{1}{n} \geq 2$

$n^{3-\cos\frac{1}{n}} \geq n^2$

$\Rightarrow a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$ termine generale di serie convergente $\Rightarrow$ per il confronto

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Esercizio 3. (5 punti) Si calcoli il valore di due e non più di due dei seguenti integrali (propri o impropri):

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{(1-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{b)} \quad \int_0^1 2^x \cdot 3^x\,dx, \qquad \text{c)} \quad \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx.$$

a) $\frac{16}{35}$, b) $\frac{5}{\log 6}$, c) 1.

a) $$\int_0^1 \frac{(1-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\left[1-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\right)dx = \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{6}}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} - 2\frac{1}{-\frac{1}{6}+1}x^{-\frac{1}{6}+1} + \frac{1}{\frac{1}{6}+1}x^{\frac{1}{6}+1}\right]_0^1$$

$$= 2 - 2\cdot\frac{6}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70-84+30}{35} = \frac{16}{35}$$

b) $$\int_0^1 2^x \cdot 3^x\,dx = \int_0^1 6^x\,dx = \left[\frac{1}{\log 6}6^x\right]_0^1 = \frac{1}{\log 6}(6-1) = \frac{5}{\log 6}$$

c) $$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{y^2}\,dy = \left[\frac{1}{-1}y^{-1}\right]_{-\infty}^{-1}$$

$$= 1$$

$y = \log x \qquad dy = \frac{1}{x}dx$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti)

(a) Si rappresenti nel piano complesso l'insieme $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} - \overline{(1+i)}z - (1+i)\overline{z} + (1+i)\overline{(1+i)} = 1 \right\}$.

(b) Si determini il min $\{|z| \mid z \in A\}$.

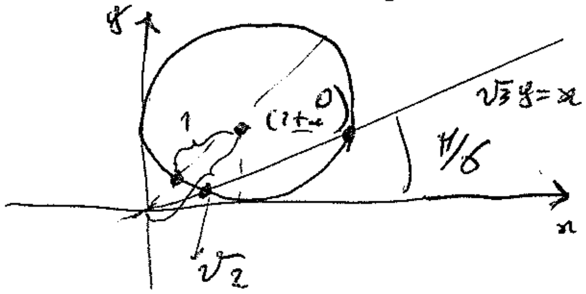
(c) Si determini il max $\{\mathrm{Im}\,(z) \mid z \in A,\ \arg(z) = \frac{\pi}{6}\}$ (Im(z) denota la parte immaginaria del numero complesso z).

Risposta: (a) Circonferenza di centro $z_0 = 1 + i$ e raggio 1;
(b) $\sqrt{2} - 1$; (c) $\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}{4}$.

a) $z \cdot \left(\overline{z} - \overline{(1+i)}\right) - (1+i)\left(\overline{z} - \overline{(1+i)}\right) = 1$

$\left[z - (1+i)\right] \cdot \overline{\left[z - (1+i)\right]} = 1 \qquad |z - (1+i)|^2 = 1$

circonferenza di raggio $R = 1$ e centro $z_0 = 1 + i$



b) il punto più vicino all'origine è quello che si trova sulla bisettrice che dista dall'origine
$d = \sqrt{2} - 1$

c) se $\arg z = \frac{\pi}{6}$ allora $z = \sqrt{3}\,y + iy$ con $y > 0$
$= y(\sqrt{3} + i) \qquad y = \mathrm{Im}(z)$

$|y\sqrt{3} + iy - 1 - i|^2 = 1 \qquad |y\sqrt{3} - 1 + i(y-1)|^2 = 1$

$(y\sqrt{3} - 1)^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad 3y^2 - 2y\sqrt{3} + 1 + y^2 - 2y + \cancel{1} = \cancel{1}$

$4y^2 - 2y(1+\sqrt{3}) + 1 = 0 \qquad y = \dfrac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 - 4}}{4}$

$= \dfrac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{\cancel{1}+2\sqrt{3}+\cancel{3}-\cancel{4}}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{12}}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}}{4}$

La più grande delle 2 sol. è $y = \mathrm{Im}(z) = \dfrac{1+\sqrt{3} + \sqrt[4]{12}}{4}$

Esercizio 5. **(6 punti)** È definita per ogni $x \geq 0$ la funzione $f(x) = \int_x^{x+1} \left(e^{-t^2} - 1\right) dt$.

(a) Se esiste, si determini il valore del $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Se esiste, si determini il valore del $\lim_{x \to +\infty} \frac{f''(x)}{e^{-(1+x)^2}}$.

Risposte: (a) -1; (b) $+\infty$.

a) $$f(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt - \int_x^{x+1} 1 \cdot dt = \int_0^{x+1} e^{-t^2} dt - \int_0^{x} e^{-t^2} dt \quad -1$$

$g(t) = e^{-t^2}$ e' integrabile in $[0, +\infty)$ quindi $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \in \mathbb{R}$

quindi $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \cancel{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt} - \cancel{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt} - 1 = -1$$

b) Usando il teorema fondamentale del calcolo

$f'(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2}$ quindi

$$f''(x) = -e^{-(x+1)^2} \cdot 2(x+1) + e^{-x^2} \cdot 2x$$

$$\frac{f''(x)}{e^{-(1+x)^2}} = -2(x+1) + 2x\, e^{\cancel{-x^2} + \cancel{x^2} + 2x + 1}$$

$$= -2 + 2x\left(e^{2x+1} - 1\right) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

Esercizio 6. (6 punti) Si consideri la funzione $F\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $F(x) = \int_2^x e^{-t^4}\sqrt[3]{t}\,dt$.

(a) Si studi la monotonia di F, evidenziando gli eventuali punti di minimo e di massimo.

(b) Si dimostri che F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(c) Si determini il polinomio di Taylor di secondo grado di F centrato nel punto $x_0 = 2$.

Soluzione: (a) $F'(x) = e^{-x^4}\sqrt[3]{x} > 0$ per ogni $x > 0$. Quindi F è strettamente crescente. (b) L'integrale improprio $\int_2^{+\infty} e^{-t^4}\sqrt[3]{t}\,dt$ è convergente e quindi F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. (c) $F''(x) = e^{-x^4}(-4x^3\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})$ per ogni $x > 0$. Inoltre $F(2) = 0$, $F'(2) = e^{-16}\sqrt[3]{2}$ e $F''(2) = e^{-16}(-32\sqrt[3]{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{4}})$. Quindi il polinomio di Taylor è $e^{-16}\sqrt[3]{2}(x-2) + e^{-16}(-16\sqrt[3]{2} + \frac{1}{6\sqrt[3]{4}})(x-2)^2$.

a) $F(x) = \int_2^x e^{-t^4}\sqrt[3]{t}\,dt$ l'integrando è CONTINUA in $[0,+\infty)$ quindi la funzione integrale è derivabile con $F'(x) = e^{-x^4}\sqrt[3]{x} > 0 \quad \forall x > 0$

Quindi F è strettamente monotona crescente e non può avere punti di massimo o minimo in $(0,+\infty)$ $x=0$ è un punto di MINIMO ASSOLUTO.

b) Per $t > 1$ $t^4 > t \Rightarrow e^{-t^4}\sqrt[3]{t} < e^{-t}\sqrt[3]{t} = e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\sqrt[3]{t}$

Ma $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\sqrt[3]{t} = 0$ quindi per t grande $e^{-t^4}\sqrt[3]{t} < e^{-\frac{t}{2}}$ integrabile in $[2,+\infty)$. Per il confronto $f(t) = e^{-t^4}\sqrt[3]{t}$ è integrabile per cui $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_2^{+\infty} e^{-t^4}\sqrt[3]{t}\,dt = \alpha \in \mathbb{R}$

quindi $y = \alpha$ è un asintoto orizzontale

c) $F''(x) = e^{-x^4}\cdot(-4x^3)\,x^{\frac{1}{3}} + e^{-x^4}\,\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$

$F(x_0) = 0 \qquad F'(x_0) = e^{-16}\sqrt[3]{2} \qquad F''(x_0) = -32\,e^{-16}\sqrt[3]{2} + e^{-16}\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

$P_2(F,2;x) = e^{-16}\sqrt[3]{2}\,(x-2) + e^{-16}\left(-16\sqrt[3]{2} + \frac{1}{6\sqrt[3]{4}}\right)(x-2)^2$