**Analisi Matematica I.** Prova scritta del **06 maggio 2025**

Cognome: ..................................... Nome: .............................. Matricola: ..............

**Consegnare** *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (**che va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* ogni risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2** ore.

# Parte A

**Esercizio 1. (5 punti)** Rappresentare in forma algebrica due (e non più di due) dei seguenti numeri complessi:

$$\text{a)}\ \frac{7-i}{3+4i}; \qquad \text{b)}\ \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}+\sqrt{2}e^{\frac{5}{6}\pi i}; \qquad \text{c)}\ e^{2i}-e^{3i}.$$

**Risposte:** a) $\frac{17-31i}{25}$; b) $\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$; c) $\cos(2)-\cos(3)+(\sin(2)-\sin(3))i$.

a) $\frac{7-i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{21-28i-3i-4}{9+16}=\frac{17-31i}{25}=\frac{17}{25}-\frac{31}{25}i$

b) $\sqrt{3}\,e^{-\frac{\pi}{6}i}+\sqrt{2}\,e^{\frac{5}{6}\pi i}=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
$+\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)$

$=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

c) $e^{2i}-e^{3i}=\cos 2+i\,\text{sen}\,2-(\cos 3+i\,\text{sen}\,3)$

$=\cos 2-\cos 3+i(\text{sen}\,2-\text{sen}\,3)$

**Esercizio 2.** **(5 punti)** Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti limiti.

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\log x}}; \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{\sin x}; \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x^4}-\cos x^2}{x^4}.$$

**Risposte:** a) $e$; b) $-1$; c) $-\frac{1}{2}$.

a) $x^{\frac{1}{\log x}} = e^{\log\left(x^{\frac{1}{\log x}}\right)} = e^{\frac{1}{\log x}\cdot \log x} = e^1 = e \xrightarrow{x\to 0^+} e$

b) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sin x} = \dfrac{|x|}{\sin x} \overset{x\to 0^-}{\sim} \dfrac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x) = -1 \xrightarrow{x\to 0^-} -1$

c) $\dfrac{\sqrt{1-2x^4}-\cos x^2}{x^4} = \dfrac{\sqrt{1-2x^4}-1}{x^4} + \dfrac{1-\cos x^2}{x^4}$

- $\dfrac{\sqrt{1-2x^4}-1}{x^4} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}(-2x^4)}{x^4} \xrightarrow{x\to 0} -1$

- $\dfrac{1-\cos x^2}{x^4} \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \dfrac{1}{2}$

Per i teoremi sul calcolo dei limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x^4}-\cos x^2}{x^4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

**Esercizio 3.** **(5 punti)** Si calcoli il valore della derivata in $x = 0$ di due e non più di due delle seguenti funzioni:

$$\text{a)}\quad f(x) = e^{|\cos(x)|} \qquad \text{b)}\quad g(x) = \frac{\tan(x^2+1)}{x^2+1}, \qquad \text{c)}\quad h(x) = (x+1)^{x+3}.$$

a) 0, b) 0, c) 3.

a) $x$ $\cos x \neq 0$ $\quad f'(x) = e^{|\cos x|} \cdot \operatorname{sgn}(\cos x) \cdot (-\operatorname{sen} x)$

$\cos 0 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

b) $$g'(x) = \frac{[1 + \operatorname{Tan}^2(x^2+1)] \cdot 2x \cdot (x^2+1) - \operatorname{Tan}(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(0) = \frac{0+0}{1} = 0$$

c) $$h(x) = e^{\log[(x+1)^{x+3}]} = e^{(x+3)\log(x+1)}$$

$$h'(x) = e^{(x+3)\log(x+1)} \left\{ 1 \cdot \log(x+1) + (x+3) \cdot \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$h'(0) = e^0 \cdot \{0 + 3\} = 3$$

## Parte B

**Esercizio 4. (6 punti)**

(a) Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si determini il carattere della serie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\alpha} \log\left(\frac{k}{k+2}\right)$.

(b) Sia $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si determini, se esiste il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{k+2}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{k+p}\right)}$.

Suggerimento: Si ricordi le proprietà algebriche dei logaritmi e le serie telescopiche.
**Risposta:** (a) Convergente se e solo se $\alpha > 0$;
(b) $\frac{2}{p}$.

a) $$k^{-\alpha}\log\left(\frac{k}{k+2}\right) = -k^{-\alpha}\log\left(\frac{k+2}{k}\right) = -k^{-\alpha}\log\left(1+\frac{2}{k}\right)$$

$$\overset{k\to\infty}{\sim} -k^{-\alpha}\cdot\frac{2}{k} = \frac{-2}{k^{1+\alpha}}$$ termine generale

di serie convergente $\Leftrightarrow 1+\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha>0$

b) Usando le serie telescopiche $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{k+p}\right) = \sum_{k=1}^{n}\log k - \sum_{k=1}^{n}\log(k+p)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\log k - \sum_{k=p+1}^{p+n}\log k \overset{n>p}{=} \sum_{k=1}^{p}\log k - \sum_{k=n+1}^{n+p}\log k$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\log k - \sum_{k=1}^{p}\log(n+k) = \sum_{k=1}^{p}\log k - \sum_{k=1}^{p}\left\{\log n + \log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$= -p\log n + \underbrace{\sum_{k=1}^{p}\log k}_{\text{costante}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{p}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)}_{\to 0\ n\to+\infty} \overset{n\to+\infty}{\sim} -p\log n$$

Quindi

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{k+2}}{\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{k+p}} \sim \frac{-2\log n}{-p\log n} = \frac{2}{p} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{p}$$

• senza usare le serie telescopiche, metodo che vale anche per $p \in \mathbb{R}$ $p > 0$

• $\log\left(1+\frac{p}{n}\right) - \frac{p}{n} \sim -\frac{p^2}{2n^2}$ serie convergente

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{p}{n}\right)-\frac{p}{n}\right] \quad \text{è CONVERGENTE}$$

per cui

$$\frac{\sum_{n=1}^{n}\log\frac{n}{n+2}}{\sum_{n=1}^{n}\log\frac{n}{n+p}} \overset{\text{CAMBIO SEGNO}}{=} \frac{\sum_{n=1}^{n}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\sum_{n=1}^{n}\log\left(1+\frac{p}{n}\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{n}\frac{2}{n}+\sum_{n=1}^{n}\left[\log\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{2}{n}\right]}{\sum_{n=1}^{n}\frac{p}{n}+\sum_{n=1}^{n}\left[\log\left(1+\frac{p}{k}\right)-\frac{p}{n}\right]}$$

$$= \frac{2}{p}\left\{\frac{1+\frac{\sum_{n=1}^{n}\left[\log\left(1+\frac{2}{k}\right)-\frac{2}{n}\right]}{\sum_{n=1}^{n}\frac{2}{k}}^{\to+\infty}}{1+\frac{\sum_{n=1}^{n}\left[\log\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{2}{n}\right]}{\sum_{n=1}^{n}\frac{p}{n}}}\right\} \to \frac{2}{p}\,\frac{1+0}{1+0}=\frac{2}{p}$$

**Esercizio 5. (6 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^4+1}}$.

(a) Si determini l'insieme $E$ dei punti in cui è derivabile e in tali punti si determini la derivata.

(b) Si determino eventuali punti di massimo o minimo relativo specificando se sono anche assoluti.

(c) Si determini se la funzione data è uniformemente continua e se è lipschitziana.

**Risposte:** (a) $E = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{x(x^4-2x^2-1)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x^4+1)^4}}$; (b) $x = 0$ punto di minimo assoluto, $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ punti di massimo assoluto; (c) è uniformemente continua ma non è lipschitziana.

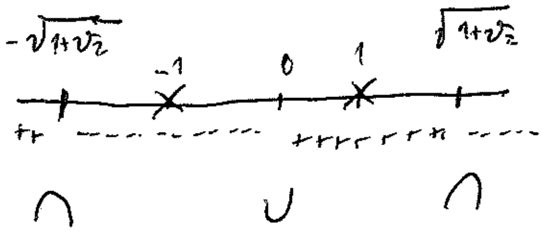
a) sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ per i teoremi sul calcolo delle derivate:

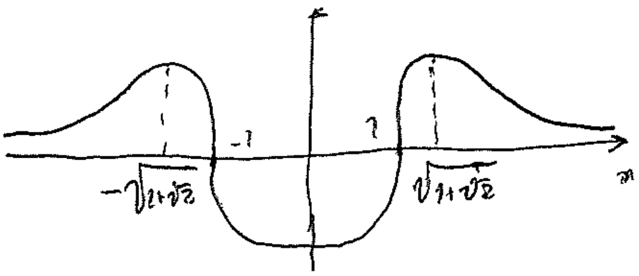
$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^4+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{2x(x^4+1) - (x^2-1)4x^3}{(x^4+1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{-2x(x^4-2x^2-1)}{(x^2-1)^{2/3}(x^4+1)^{4/3}} \qquad f'(x) \xrightarrow{x \to \pm 1} \pm\infty$$

quindi in $\pm 1$ non è derivabile

b) $f'(x) > 0 \iff -x(x^4-2x^2-1) > 0$




$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

$x = 0$ P.TO DI MINIMO ASSOLUTO $\quad x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ P.TI DI MASSIMO ASSOLUTI

c) Poiché $f'(x) \xrightarrow{x \to \pm 1} \pm\infty$ NON E' LIPSCHITZIANA

- E' Lipschitziana in $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ perché in tali intervalli $f'$ è limitata
- E' uniformemente continua in $[-2,2]$ poiché è continua e $[-2,2]$ è COMPATTO

$\Rightarrow$ E' UNIFORMEMENTE CONTINUA SU $\mathbb{R}$

**Esercizio 6.** **(6 punti)** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si consideri $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)dx$.

(a) Calcolare i valori di $I_0$ e di $I_1$.

(b) Provare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1}$.

(c) Usando l'uguaglianza $\log(I_n) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(1 - \frac{1}{2j+1}\right)$, valida per ogni $n \geq 1$, calcolare $\lim_{n\to+\infty} \log(I_n)$ e $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

**Soluzione:** (a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$ mentre $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx = \sin(x)\cos^2(x)\big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \frac{2}{3}\sin^3(x)\big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$.
(b) L'uguaglianza è vera per $n = 1$ (segue dal risultato del punto precedente). Supponiamo sia vera per $n$ e proviamola per $n+1$. Usando la formula di integrazione per parti si ottiene che $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+3}(x)dx = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n+1}(x)dx = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(x))\cos^{2n+1}(x)dx = (2n+2)I_n - (2n+2)I_{n+1}$. Pertanto, usando l'ipotesi induttiva, si ottiene che $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_n = \frac{2n+2}{2n+3}\prod_{j=1}^{n}\frac{2j}{2j+1} = \prod_{j=1}^{n+1}\frac{2j}{2j+1}$.
(c) Usando l'uguaglianza data, il calcolo del primo limite corrisponde al valore della serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{2j+1}\right)$, che ha lo stesso carattere della serie $-\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2j+1}$, da cui segue che il valore è $-\infty$. Pertanto $\lim_{n\to+\infty} \log(I_n) = -\infty$. Da quest'ultimo si può dedurre che $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(I_n)} = 0$.

a) $I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = 1$ $\quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x \, dx$

$= \left[\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$

b) $I_1 = \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1} = \prod_{j=1}^{1} \frac{2j}{2j+1}$ $\quad I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+3} x \, dx = \underbrace{\left[\operatorname{sen} x \cdot \cos^{2n+2} x\right]_0^{\pi/2}}_{=0}$

$- \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot (2n+2) \cdot \cos^{2n+1} x \cdot (-\operatorname{sen} x) \, dx = (2n+2)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^{2n+1} x \, dx$

$= (2n+2)\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x)\cos^{2n+1} x \, dx = (2n+2)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx$

$- (2n+2)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+3} x \, dx$ quindi

$I_{n+1} = (2n+2) I_n - (2n+2) I_{n+1}$ $\quad (2n+3) I_{n+1} = (2n+2) I_n$

Usando l'ipotesi di induzione $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n = \frac{2n+2}{2n+3} \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1}$

$= \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j}{2j+1}$

c) $\log I_n = \log \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} = \sum_{j=1}^{n} \log \frac{2j}{2j+1} = -\sum_{j=1}^{n} \log \frac{2j+1}{2j} = -\sum_{j=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{2j}\right)$

$\log\left(1 + \frac{1}{2j}\right) \underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2j}$ termine generale di serie divergente

$\Rightarrow -\sum_{j=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{2j}\right) \longrightarrow -\infty$ per $n \to +\infty$