Analisi Matematica I. Prova scritta del **23 giugno 2025**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che va **consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* ogni risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare lo sviluppo di Taylor, centrato in $x_0 = 1$, fino al secondo ordine compreso e con resto di Peano, di due (e non più di due) delle seguenti funzioni:

$$\text{a)}\quad f(x) = x^x; \qquad \text{b)}\quad g(x) = e^x + e^{-x}; \qquad \text{c)}\quad h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) $f(x) = e^{x \ln x}$ $\quad f'(x) = e^{x \ln x}\{\ln x + 1\}$ $\quad f''(x) = e^{x \ln x}\{(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\}$

$f(1) = 1 \quad f'(1) = 1 \quad f''(1) = 2$

$f(x) = 1 + 1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-1)^2 + o((x-1)^2) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$

b) $g(x) = e^x + e^{-x} \quad g'(x) = e^x - e^{-x} \quad g''(x) = e^x + e^{-x}$

$g(1) = e + e^{-1} \quad g'(1) = e - e^{-1} \quad g''(1) = e + e^{-1}$

$g(x) = e + e^{-1} + (e - e^{-1})(x-1) + \frac{e + e^{-1}}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

c) $h(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \qquad h''(x) = 0$

$h(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad h'(1) = 0 \quad h''(1) = 0$

$h(x) = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

$= \frac{\pi}{2} + o((x-1)^2)$

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di due e non più di due dei seguenti integrali:

$$\text{a)} \int_0^2 (x-1)\sqrt{x}\,dx; \qquad \text{b)} \int_1^e \frac{(\log x)^3}{x}\,dx; \qquad \text{c)} \int_1^2 \log^2 x\,dx.$$

a) $\int_0^2 (x-1)\sqrt{x}\,dx = \int_0^2 [x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}]\,dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2$

$= \frac{2}{5} 2^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{3}\right)\sqrt{2} = \frac{24-20}{15}\sqrt{2} = \frac{4}{15}\sqrt{2}$

b) $\int_1^e \frac{(\log x)^3}{x}\,dx = \int_0^1 t^3\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

$t = \log x$

$dt = \frac{1}{x}\,dx$

c) $\int_1^2 \log^2 x\,dx = \left[x \log^2 x\right]_1^2 - \int_1^2 \cancel{x} \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx$

$= 2\log^2 2 - 2\left\{\left[x \log x\right]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\,dx\right\}$

$= 2\log^2 2 - 2\left\{2\log 2 - \int_1^2 dx\right\}$

$= 2\log^2 2 - 4\log 2 + 2$

Esercizio 3. **(5 punti)** Si calcoli il valore, se esiste, di due (e non più di due) fra i seguenti limiti:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x+x^2|}}{2\sqrt{|x|}+x^2} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{e^x}-e}{e^x-1} \qquad \text{c)} \lim_{x\to +\infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad .$$

a) $$\frac{\sqrt{|x+x^2|}}{2\sqrt{|x|}+x^2} = \frac{\cancel{\sqrt{|x|}}\sqrt{|1+x|}}{\cancel{\sqrt{|x|}}\left(2+|x|^{3/2}\right)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2}$$

b) $$\frac{e^{e^x}-e}{e^x-1} = e\,\frac{e^{\overset{\to 0}{(e^x-1)}}-1}{e^x-1} \overset{x\to 0}{\sim} e\,\frac{\cancel{e^x-1}}{\cancel{e^x-1}} = e$$

c) $$x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to +\infty} 1$$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Si consideri la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \int_0^x t^6 \sqrt[3]{t-1}\, dt$.

(a) Determinare i punti di massimo relativo e di minimo relativo di f.

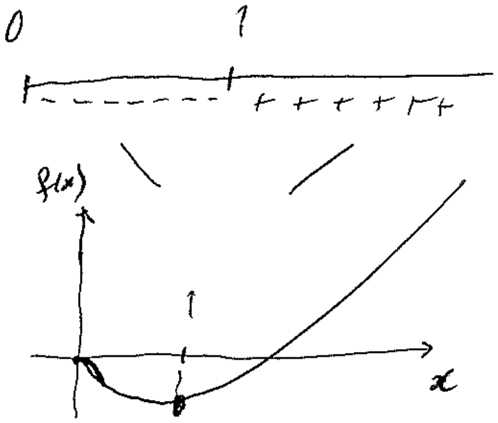
(b) Determinare l'insieme dove f è convessa.

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare il numero di elementi dell'insieme $Z_k = \{x \in [0, +\infty) : f(x) = k\}$.

a) $g(t) = t^6 \sqrt[3]{t-1}$ è continua per $t \geq 0$ quindi

$f'(x) = g(x) = x^6 \sqrt[3]{x-1}$ $f'(0)=0$

• $f'(x) > 0 \iff x > 1$



• $f(0) = 0 \Rightarrow f(1) < 0$

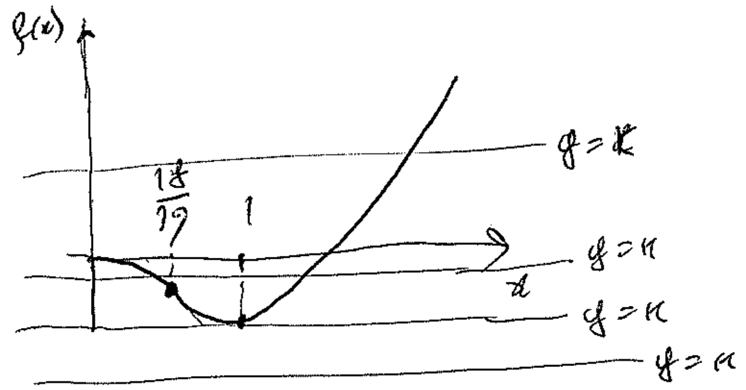
• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• $x=0$ punto di massimo relativo $x=1$ punto di minimo assoluto

b) f derivabile 2 volte in $(0,1) \cup (1, +\infty)$

$$f''(x) = g'(x) = 6x^5 (x-1)^{1/3} + x^6 \frac{1}{3} (x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^5}{3(x-1)^{2/3}} [19x - 18]$$

$f''(x) \xrightarrow{x \to 1^\pm} +\infty$ f non è derivabile 2 volte in $x=1$



$f''(x) > 0 \iff 19x - 18 > 0 \wedge x \neq 1$

$\Rightarrow x > \frac{18}{19} \wedge x \neq 1$

c) • $k < f(1)$ $\# Z_k = 0$

• $k = f(1)$ $\# Z_k = 1$

• $f(1) < k \leq 0$ $\# Z_k = 2$

• $k > 0$ $\# Z_k = 1$

Esercizio 5. (6 punti)

(a) Si determinino le soluzioni complesse non nulle dell'equazione $\overline{z} = \alpha z^2$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Si determinino le soluzioni complesse non nulle dell'equazione $\overline{z} = \frac{|z| - 2}{3} z^2$.

a) $\alpha = 0$ $\quad \overline{z} = 0 \Rightarrow$ Nessuna soluzione non nulla

$\alpha \neq 0 \quad z = x + iy \quad \overline{z} = x - iy \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$x - iy = \alpha(x^2 - y^2) + i\, 2\alpha xy$$

$$\begin{cases} x = \alpha(x^2 - y^2) \\ -y = 2\alpha xy \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = x^2 - \frac{1}{\alpha} x \\ y(1 + 2\alpha x) = 0 \end{cases}$$

• $y = 0 \quad x(x - \frac{1}{\alpha}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{\alpha}}$

• $1 + 2\alpha x = 0 \quad x = -\frac{1}{2\alpha} \quad y^2 = \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2\alpha} = \frac{3}{4\alpha^2}$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \qquad \boxed{z = \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}$$

b) prendendo il modulo dell'equazione si ha

$|z| = \frac{||z| - 2|}{3} |z|^2$ poiché $|z| \neq 0 \quad 3 = |z|\,||z| - 2|$

• $|z| \geq 2 \quad |z|^2 - 2|z| - 3 = 0 \quad |z| = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix} \Rightarrow$ Non acc.

• $0 < |z| < 2 \quad 3 = |z|[2 - |z|] = 2|z| - |z|^2 \quad |z|^2 - 2|z| + 3 = 0$ IMP.

QUINDI necessariamente $|z| = 3$ e $\overline{z} = \frac{1}{3} z^2$

Per il punto a) $\quad z = 3 \quad z = 3\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 3 e^{\pm\frac{2}{3}\pi i}$

Esercizio 6. (6 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiamo $a_n = \int_0^{1/n} x^n e^x \, dx$.

(a) Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, vale l'uguaglianza $a_n = \dfrac{e^{1/n}}{n^n} - na_{n-1} + n \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} x^{n-1} e^x \, dx$.

(b) Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta $0 < a_n < \frac{1}{n+1} \frac{e}{n^{n+1}}$.

(c) Si determini il carattere della serie $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n + na_{n-1})$.

a) $n \geq 2$ $\quad a_n = \displaystyle\int_0^{1/n} x^n e^x \, dx = \left[x^n e^x \right]_0^{1/n} - \int_0^{1/n} n x^{n-1} e^x \, dx$

$$= \frac{1}{n^n} e^{\frac{1}{n}} - n \left(\int_0^{\frac{1}{n-1}} x^{n-1} e^x \, dx - \int_{1/n}^{1/n-1} x^{n-1} e^x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{n^n} e^{\frac{1}{n}} - n \int_0^{\frac{1}{n-1}} x^{n-1} e^x \, dx + n \int_{1/n}^{1/n-1} x^{n-1} e^x \, dx$$

$$= \frac{e^{1/n}}{n^n} - n a_{n-1} + n \int_{1/n}^{1/n-1} x^{n-1} e^x \, dx$$

b) $x^n e^x > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{1}{n})$ quindi $a_n > 0$

$$a_n = \int_0^{1/n} x^n e^x \, dx \overset{x < \frac{1}{n} \leq 1}{<} e \int_0^{1/n} x^n \, dx = e \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^{1/n}$$

$$= e \, \frac{1}{n+1} \, \frac{1}{n^{n+1}}$$

c) Per $n \geq 2$ $\quad a_n < e \dfrac{1}{n+1} \dfrac{1}{n^{n+1}} \leq e \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{e}{n^3}$ T. G.

di serie convergente

$$n a_{n-1} \leq \cancel{n} \, e \, \frac{1}{\cancel{n}} \, \frac{1}{(n-1)^n} \leq \frac{e}{(n-1)^3} \overset{\text{se } n \geq 3}{\sim} \frac{e}{n^3} \quad \text{T. G. di}$$

serie convergente $\Rightarrow a_n + n a_{n-1}$ è t. G. di serie convergente.