Analisi Matematica I. Prova scritta del **17 luglio 2025**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* **il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che va **consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* ogni risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Determinare due (e non più di due) dei seguenti valori.

a) $\min\{n \in \mathbb{N}\colon 10 < n^3 \leq 100\}$; b) $\min\left\{\arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$; c) $\max\left\{2 + \frac{3}{4(n+1)} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

a) $\{ n \in \mathbb{N} \mid 10 < n^3 \leq 100 \} = \{3, 4\}$ $\quad \min\{3,4\} = 3$

b) $\arctan\left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = (-1)^n \arctan\frac{1}{n} = \begin{cases} -\arctan\frac{1}{n} & n \text{ DISPARI} \\ \arctan\frac{1}{n} & n \text{ PARI} \end{cases}$

$n \to \arctan\frac{1}{n}$ è positiva decrescente $\Rightarrow$

$\min\left\{ \arctan\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} = \arctan\frac{(-1)^1}{1} = -\frac{\pi}{4}$

c) $a_n = 2 + \frac{3}{4(n+1)}$ è decrescente, quindi

$\max\left\{ 2 + \frac{3}{4(n+1)} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 2 + \frac{3}{4(0+1)} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

Esercizio 2. **(5 punti)** Si determini il carattere di due (e non più di due) delle seguenti serie, specificando se l'eventuale convergenza è o non è assoluta:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{(2+\sin n)\sqrt{n^7}}; \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n}; \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{3n}\right).$$

a) $0 \leq \dfrac{n^2+(-1)^n}{(2+\operatorname{sen} n)\sqrt{n^7}} \sim \dfrac{n^2}{(2+\operatorname{sen} n)\, n^{7/2}} \leq \dfrac{1}{1 \cdot n^{7/2-2}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

$\frac{3}{2} > 1$ $\quad \frac{1}{n^{3/2}}$ termine generale di serie convergente.

Per il criterio del confronto la serie data converge assolutamente

b) criterio della radice $\left(\dfrac{n^n}{e^n}\right)^{1/n} = \dfrac{n}{e} \to +\infty$

la serie data diverge a $+\infty$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n = \tan\frac{1}{3n} \geq 0$, decrescente

con $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\frac{1}{3n} = 0$ per il criterio di Leibniz la serie data è convergente.

Ma $|(-1)^n a_n| = \tan\frac{1}{3n} \sim \frac{1}{3n}$ termine generale di serie divergente. Quindi la serie data non è assolutamente convergente

Esercizio 3. (5 punti) Si calcoli il valore di due (e non più di due) fra i seguenti integrali (propri od impropri):

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}-x}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{b)} \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad \text{c)} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x\,dx.$$

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} - x^{1-\frac{1}{2}} \right)dx = \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}} \right)dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{-\frac{1}{4}+1} x^{-\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$

$\displaystyle = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx = \left[-x\cos x \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot(+\cos x)\,dx$

$= -\pi\cdot(-1) - [-(-\pi)\cdot(-1)] + [\operatorname{sen} x]_{-\pi}^{\pi}$

$= \pi + \pi = 2\pi$

c) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ è dispari, infatti $f(-x) = (-x)^2 \operatorname{sen}(-x)$

$= x^2\cdot(-\operatorname{sen} x) = -f(x)$

Quindi $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\,dx = 0$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \int_{-x}^{2x} e^{-t^2}\, dt$.

(a) Dimostrare che $f(x) = 3x - 3x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.

(b) Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3\sin(x)}{\arctan(x^3)}$.

a) $$f(x) = \int_{-x}^{2x} e^{-t^2} dt = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt - \int_0^{-x} e^{-t^2} dt$$

$$f'(x) = e^{-(2x)^2} \cdot 2 - e^{-(-x)^2} \cdot (-1) = 2e^{-4x^2} + e^{-x^2}$$

$$f''(x) = -16x\, e^{-4x^2} - 2x e^{-x^2}$$

$$f'''(x) = -16 e^{-4x^2} + 128 x^2 e^{-4x^2} - 2 e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 3 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -18$$

$$f(x) = 3x - \frac{18}{3!} x^3 + o(x^3) = 3x - 3x^3 + o(x^3)$$

b) $$\frac{f(x) - 3\operatorname{sen} x}{\arctan x^3} \sim \frac{3x - 3x^3 + o(x^3) - 3\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{3x} - 3x^3 - \cancel{3x} + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \left(\frac{1}{2} - 3\right) + o(1) \to -\frac{5}{2}$$

Esercizio 5. **(6 punti)** Per ogni $c \in \mathbb{R}$ sono definiti gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| = 2\}, \quad B_c = \{z \in \mathbb{C} \mid (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2c = 0\}.$$

(a) Al variare di $c \in \mathbb{R}$ si determini il numero di elementi dell'insieme $A \cap B_c$.

(b) Al variare di $c \in \mathbb{R}$ si determinino tutti e soli i punti $w_c \in B_c$ tali che $|w_c - 4|$ sia minima.

(c) Per quale $c \in \mathbb{R}$ risulta minimo il modulo complesso $|w_c|$ di w_c?

L'insieme A è una circonferenza di centro $z_0=4$ e raggio $r=2$

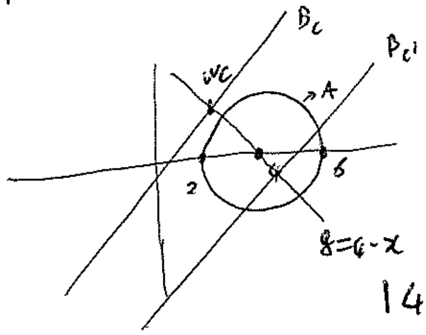
Per determinare l'insieme B_c poniamo $z=x+iy$

$$(1+i)(x+iy)+(1-i)(x-iy)+2c=0$$

$$x+\cancel{iy}+\cancel{ix}-y+x-\cancel{iy}-\cancel{ix}-y+2c=0 \qquad \cancel{2}x-\cancel{2}y+\cancel{2}c=0 \qquad \boxed{x-y+c=0}$$

$y=x+c$ rette parallele alla bisettrice 1° e 3° quadrante

(a)



si hanno 2 intersezioni se la distanza della retta dal punto (4,0) è minore di 2 $\Rightarrow \dfrac{|4-0+c|}{\sqrt{1+1}}<2$

$|4+c|<2\sqrt{2}$ $\quad \boxed{-4-2\sqrt{2}<c<-4+2\sqrt{2}}$ 2 ELEMENTI

Se $c=-4\pm 2\sqrt{2}$ retta tangente $\Rightarrow$ UN ELEMENTO

$c<-4-2\sqrt{2} \vee c>-4+2\sqrt{2}$ $\quad A\cap B_c=\emptyset$

(b) L'equazione della retta passante per (4,0) con coefficiente angolare -1 è $y=-(x-4)+0=4-x$. Occorre trovare l'intersezione con la retta B_c $\begin{cases} y=4-x \\ y=x+c \end{cases}$ $\quad 4-x=x+c \quad 2x=4-c \quad x=2-\frac{c}{2}$

$y=2-\frac{c}{2}+c=2+\frac{c}{2}$

$\Rightarrow W_c=\left(2-\frac{c}{2}, 2+\frac{c}{2}\right)$

(c) $|W_c|=\sqrt{4-2c+\frac{c^2}{4}+4+2c+\frac{c^2}{4}}=\sqrt{8+\frac{c^2}{2}}$ Minimo per $c=0$

Esercizio 6. (6 punti) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}\sin(\log\sqrt{x})$ se $x > 0$ e $f(0) = 0$.

(a) Si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo locale di f;

(b) si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti di f;

(c) motivando esaurientemente la risposta, si determini se f è uniformemente continua e se è Lipschitziana.

a) $f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}(\ln\sqrt{x})$ $\quad x \geq 0 \quad$ derivabile per $x > 0$ con

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{sen}(\ln\sqrt{x}) + \cancel{\sqrt{x}}\,\cos(\ln\sqrt{x})\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\mathrm{sen}(\ln\sqrt{x}) + \cos(\ln\sqrt{x})\right]$$

$$\mathrm{sen}(\ln\sqrt{x}) + \cos(\ln\sqrt{x}) = 0 \iff \ln\sqrt{x} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \ln x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{punti stazionari}$$

$$\mathrm{sen}(\ln\sqrt{x}) + \cos(\ln\sqrt{x}) > 0 \iff -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \ln\sqrt{x} < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Punti di Minimo $\left\{ e^{-\frac{\pi}{2} + 4k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ PARI} \right\}$

Punti di Massimo $\left\{ e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ DISPARI} \right\}$

b) $z_k = e^{\pi + 2k\pi} \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty$ e $f(z_k) = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k e^{\frac{\pi}{2} + k\pi}$

Successione illimitata superiormente e inferiormente $\Rightarrow$ f non ha punti di massimo o minimo assoluti.

c) $y_k = e^{4k\pi} \xrightarrow{k \to -\infty} 0$ MA $f'(y_k) = \frac{1}{2e^{2k\pi}}\left(\mathrm{sen}(2k\pi) + \cos(2k\pi)\right) = \frac{1}{2} e^{-2k\pi} \xrightarrow{k \to -\infty} +\infty$

essendo la derivata di f illimitata f non può essere Lipschitziana.

Ma se $x \geq 1$ $|f'(x)| \leq 1$ quindi $f|_{[1,+\infty)}$ è

Lipschitziana e quindi uniformemente continua.

Inoltre $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ essendo il prodotto di una

funzione infinitesima per una funzione limitata

per cui $f|_{[0,1]}$ è continua e quindi uniformemente

continua essendo $[0,1]$ chiuso e limitato

Quindi f è uniformemente continua.