**Analisi Matematica I**. Prova scritta del **09 settembre 2025**

Cognome: ...................................... Nome: ............................... Matricola: ...............

**Consegnare *solo* il presente fascicolo** (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* ogni risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

# Parte A

**Esercizio 1. (5 punti)** Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si scriva il polinomio di Taylor di $f \circ g$ di grado 2 centrato in $x_0$ in due (e non più di due) dei seguenti casi.

a) $f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x^2 - 1, \quad x_0 = 1;$
b) $f(x) = \cos(x), \quad g(x) = x + 1, \quad x_0 = -1;$
c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = \cos(x), \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

a) $h(x) = (f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(x^2-1)$

$h'(x) = \cos(x^2-1) \cdot 2x \qquad h''(x) = 2\cos(x^2-1) + 2x \cdot [-\operatorname{sen}(x^2-1)] \cdot 2x$

$h(1) = 0 \quad h'(1) = 2 \quad h''(1) = 2$

$P_2(x) = 2 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2(x-1)^2 = 2(x-1) + (x-1)^2$

b) $h(x) = (f \circ g)(x) = \cos(x+1) \qquad h'(x) = -\operatorname{sen}(x+1) \qquad h''(x) = -\cos(x+1)$

$h(-1) = 1 \quad h'(-1) = 0 \quad h''(-1) = -1$

$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2$

c) $h(x) = (f \circ g)(x) = e^{\cos x}$

$h'(x) = e^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x) \qquad h''(x) = e^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)^2 - e^{\cos x} \cos x$

$h(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad h'(\frac{\pi}{2}) = -1 \quad h''(\frac{\pi}{2}) = 1$

$P_2(x) = 1 - (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$

**Esercizio 2. (5 punti)** Si calcoli il valore di due (e non più di due) dei seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+2}}$; b) $\lim_{x\to\pi^+}(\sin x)(\cos x)(\cotan x)$; c) $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(2x)}{1-\cos(3x)}$.

a) $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+2}} \overset{x\to-\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{|x|} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1 \xrightarrow{x\to-\infty} 1-1=0$

b) $(\operatorname{sen} x)(\cos x)(\cotan x) = \cancel{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \xrightarrow{x\to\pi^+} (\cos^2 \pi) = 1$

c) $\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{1-\cos(3x)} \overset{x\to0}{\sim} \frac{4\cancel{x^2}}{\frac{1}{2}9\cancel{x^2}} = \frac{8}{9}$

**Esercizio 3. (5 punti)** Si determini la forma algebrica di due (e non più di due) tra i seguenti numeri complessi

a) $z = (1-i)^{12}$, b) $z \in \mathbb{C}$ tale che $\begin{cases} \frac{-2}{z-2} = z \\ |z+i| > 1 \end{cases}$, c) $z \in \mathbb{C}$ tale che $\overline{z} = \dfrac{1}{(2+i)^2}$.

a) $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}$ $\quad (1-i)^{12} = 2^{\frac{12}{2}} e^{-\frac{\pi}{4} 12 \cdot i} = 2^6 e^{-3\pi i}$

$= -2^6 = -64$

b) $z \neq 2$ $\quad -2 = z^2 - 2z$ $\quad z^2 - 2z + 2 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1$ $\quad w_0 = 1 + i$ $\quad w_1 = 1 - i$

$|w_0 + i| = |1 + 2i| = \sqrt{5} > 1$

$|w_1 + i| = |1| = 1 \not> 1$ $\quad \Rightarrow z = 1 + i$

c) $\overline{z} = \dfrac{1}{(2+i)^2}$ $\quad z = \dfrac{1}{(2-i)^2} = \dfrac{1}{4 - 4i - 1} = \dfrac{1}{3-4i} \dfrac{3+4i}{3+4i}$

$= \dfrac{3+4i}{25} = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25} i$

# Parte B

**Esercizio 4. (6 punti)** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|1+\alpha|^n + n^3}{e^{\alpha n} + 2^{\alpha^2}\log(n)}$.

(a) Determinare il carattere della serie per $\alpha = 1$ e per $\alpha = -1$.

(b) Determinare il carattere della serie per ogni $\alpha > 0$. Si noti che $e^y > 1 + y$ per ogni $y \neq 0$.

(c) Determinare il carattere della serie per ogni $-1 \leq \alpha \leq 0$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ • $\alpha = 1$ $\quad a_n = \frac{2^n + n^3}{e^n + 2\cdot\log n} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n$

$\frac{2}{e} < 1 \Rightarrow$ conv.

• $\alpha = -1$ $\quad a_n = \frac{n^3}{e^{-n} + 2\cdot\log n} \sim \frac{n^3}{2\log n} \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$

Diverge perché il termine generale tende a $+\infty$

b) $a_n = \frac{|1+\alpha|^n + n^3}{e^{\alpha n} + 2^{\alpha^2}\log n} \sim \frac{(1+\alpha)^n}{e^{\alpha n}} = \left(\frac{1+\alpha}{e^\alpha}\right)^n$

converge se $\frac{1+\alpha}{e^\alpha} < 1$ cioè $e^\alpha > 1+\alpha$ sempre vero

$\Rightarrow$ converge

c) $a_n = \frac{\overset{\text{LIMITATO}}{|1+\alpha|^n} + n^3}{e^{\alpha n} + 2^{\alpha^2}\log n} \sim \frac{n^3}{2^{\alpha^2}\log n} \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$

$\Rightarrow$ ANCORA diverge

**Esercizio 5. (6 punti)** Si consideri la funzione, dipendente dai parametri reali $\alpha$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \alpha \sin x, \quad \text{se } x \le 0; \qquad f(x) = \frac{\sin(\beta x^2)}{x(x-1)}, \quad \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 1; \qquad f(x) = \gamma, \text{ se } x = 1.$$

(a) Per quali valori di $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ la funzione $f$ è continua in ogni punto di $\mathbb{R}$?

(b) Per quali valori di $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ la funzione $f$ è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$?

a) ~~Allora~~ in $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ è composizione di funzioni continue, quindi continua

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ sempre continua in $x=0$

$$\frac{\text{sen}(\beta x^2)}{x(x-1)} = \frac{\text{sen}(\beta(x^2-1)+\beta)}{x(x-1)} \xrightarrow[x\to 1^\pm]{} \pm\infty \quad \text{se } \beta \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

SE $k \neq 0$.
IN CASO $k=0$ BANALE

Per essere continua $\beta = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}(k\pi(x^2-1)+k\pi)}{x(x-1)} = (-1)^k \frac{\text{sen}(k\pi(x^2-1))}{x(x-1)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{k\pi\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}(-1)^k$$

$\to 2k\pi\cdot(-1)^k$ quindi è continua

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \beta = k\pi \ \wedge \ \gamma = (-1)^k 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

b) $x \le 0 \quad f'(x) = \alpha \cos x \qquad f'_-(0) = \alpha$

$x > 0 \quad x \neq 1 \quad f'(x) = \dfrac{\cos(\beta x^2)\cdot 2\beta x \cdot x(x-1) - \text{sen}(\beta x^2)\cdot(2x-1)}{[x(x-1)]^2}$

$$= \frac{2\beta x^2\cdot(x-1)\cos(\beta x^2) - (2x-1)\,\text{sen}(\beta x^2)}{x^2(x-1)^2}$$

$$= 2\beta\frac{\cos(\beta x^2)}{x-1} - \frac{2x-1}{(x-1)^2}\frac{\text{sen}(\beta x^2)}{x^2} \to -2\beta+\beta = -\beta$$

Differenziabile in $x=0$ se $\alpha = -\beta$

**Esercizio 6. (6 punti)** Siano $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$.

(a) Si calcoli la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^p}{2x^p+1}\right)^n$ per $x > 0$;

(b) per quali valori di $p > 0$ e $q \in \mathbf{R}$ è convergente l'integrale $\int_1^{+\infty} x^q \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^p}{2x^p+1}\right)^n\right) dx$?

(c) per quali valori di $p \leq 0$ e $q \in \mathbf{R}$ è convergente l'integrale $\int_1^{+\infty} x^q \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^p}{2x^p+1}\right)^n\right) dx$?

a) $\frac{x^p}{2x^p+1} < 1 \Rightarrow$ serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^p}{2x^p+1}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x^p}{2x^p+1}} - 1 = \frac{2x^p+1}{\cancel{2}x^p+1-\cancel{x^p}} - 1$$

$$= \frac{\cancel{2}x^p \cancel{+1} - \cancel{x^p} \cancel{-1}}{x^p+1} = \frac{x^p}{x^p+1}$$

b) $\int_1^{+\infty} x^q \frac{x^p}{x^p+1} dx$ se $p>0$ $x^q \frac{x^p}{x^p+1} \sim x^q \frac{\cancel{x^p}}{\cancel{x^p}} = x^q$

integrabile in $+\infty$ se $q < -1$

c) se ~~$p \leq 0$~~ $p=0$ $x^q \frac{x^p}{x^p+1} = x^q \frac{1}{2}$ integrabile se $q<-1$

se $p < 0$ $x^q \frac{x^p}{\underset{\downarrow \to 0}{x^p+1}} \sim x^{q+p}$ integrabile

se $q+p < -1$