1 - Introduzione alla Programmazione Lineare

Mauro Passacantando

Dipartimento di Scienze Economico-Aziendali e Diritto per l'Economia
Università degli Studi di Milano-Bicocca
mauro.passacantando@unimib.it

Corso di Dinamica dei Sistemi Aziendali
Laurea Magistrale in Scienze Economico-Aziendali
Università degli Studi di Milano-Bicocca

Esempio 1 - problema[1]

Un'azienda produce finestre e porte in vetro di alta qualità.
L'azienda ha tre stabilimenti: nello stabilimento 1 vengono prodotti i telai in alluminio, nello stabilimento 2 vengono prodotti i telai in legno, mentre nello stabilimento 3 viene prodotto il vetro e si assemblano i prodotti.
I dirigenti dell'azienda hanno deciso di lanciare sul mercato due nuovi articoli con un alto potenziale di vendita: una porta in vetro con intelaiatura in alluminio (prodotto 1) e una finestra con intelaiatura in legno (prodotto 2).
I nuovi articoli verranno prodotti in lotti da venti pezzi ciascuno. La divisione marketing ha verificato che l'azienda può vendere tutta la quantità prodotta di entrambi i nuovi articoli.

[1] Esempio tratto da F.S. Hillier, G.J. Lieberman, Ricerca Operativa, McGraw-Hill, 2010.

Esempio 1 - problema

Nella tabella seguente sono indicati: il tempo (in ore) disponibile settimanalmente in ogni stabilimento per la produzione dei nuovi articoli, il tempo (in ore) che ogni stabilimento impiega nella produzione di un lotto di ogni nuovo articolo ed il profitto per ogni lotto prodotto di ogni nuovo articolo.

	Tempo di produzione per lotto (ore)		Tempo di produzione disponibile
Stabilimento	Prodotto 1	Prodotto 2	settimanalmente (ore)
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Profitto per lotto (€)	3000	5000	

L'azienda vuole determinare quanti lotti deve produrre settimanalmente per ogni nuovo articolo, compatibilmente con le risorse a disposizione, in modo da massimizzare il profitto totale.

Esempio 1 - modello

Variabili decisionali:

$x_1 =$ numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
$x_2 =$ numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana

Esempio 1 - modello

Variabili decisionali:
x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2$ (da massimizzare)

Esempio 1 - modello

Variabili decisionali:
$x_1 =$ numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
$x_2 =$ numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2$ (da massimizzare)

Vincoli da rispettare:
$x_1 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)

Esempio 1 - modello

Variabili decisionali:
x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2$ (da massimizzare)

Vincoli da rispettare:
$x_1 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)

Esempio 1 - modello

Variabili decisionali:
x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2$ (da massimizzare)

Vincoli da rispettare:
$x_1 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (produzione stabilimento 3)

Esempio 1 - modello

Variabili decisionali:
$x_1 =$ numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
$x_2 =$ numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2$ (da massimizzare)

Vincoli da rispettare:
$x_1 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (produzione stabilimento 3)
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Esempio 1 - modello

Variabili decisionali:
x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2$ (da massimizzare)

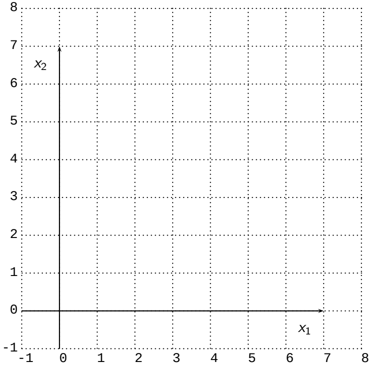
Vincoli da rispettare:
$x_1 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (produzione stabilimento 3)
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Modello matematico (di programmazione lineare)

$$\begin{cases} \max \; 3000x_1 + 5000x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

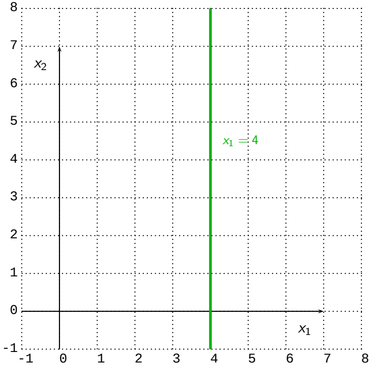
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max\ 3000x_1 + 5000x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



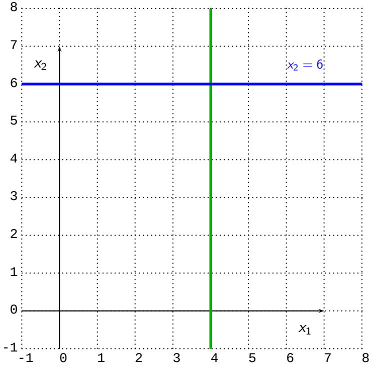
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max\ 3000x_1 + 5000x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



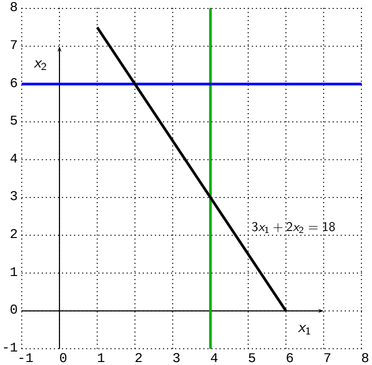
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max\ 3000x_1 + 5000x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



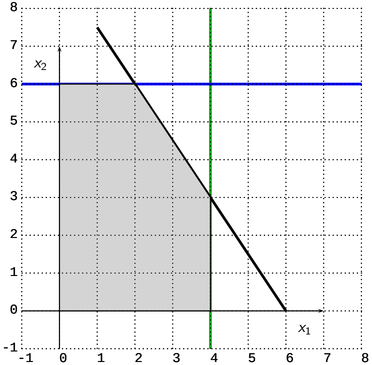
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max\ 3000x_1 + 5000x_2$$
$$x_1 \le 4$$
$$2x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

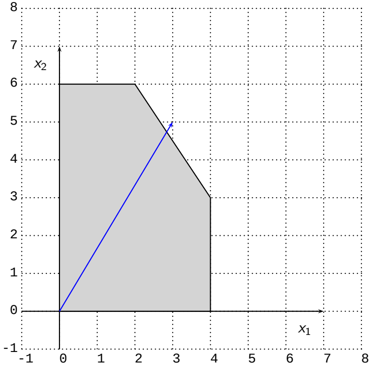
$$\max\ 3000x_1 + 5000x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

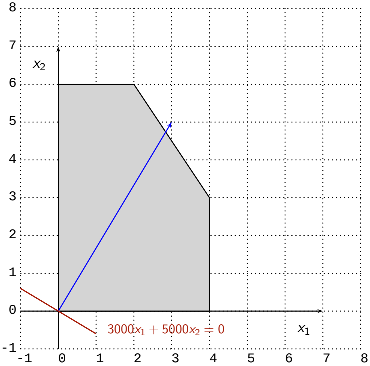
$$\begin{aligned} &\max \; 3000x_1 + 5000x_2 \\ &x_1 \leq 4 \\ &2x_2 \leq 12 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

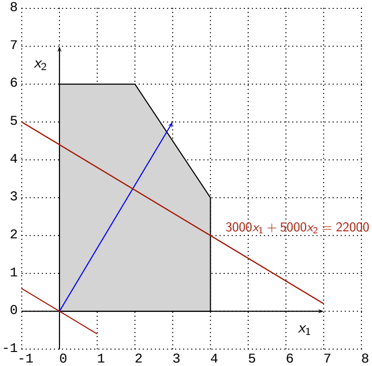
$$\max \; 3000x_1 + 5000x_2$$
$$x_1 \le 4$$
$$2x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

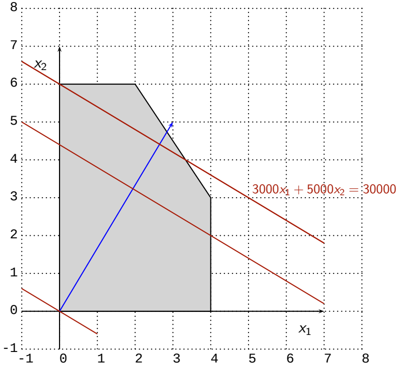
$$\max \ 3000x_1 + 5000x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

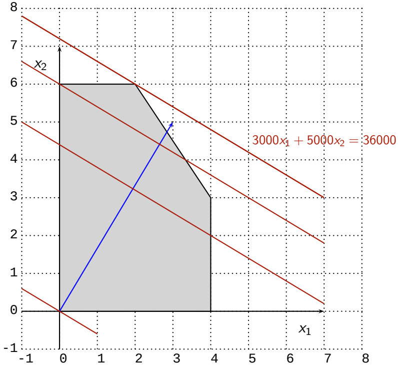
$$\begin{aligned} &\max \ 3000x_1 + 5000x_2 \\ &x_1 \leq 4 \\ &2x_2 \leq 12 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

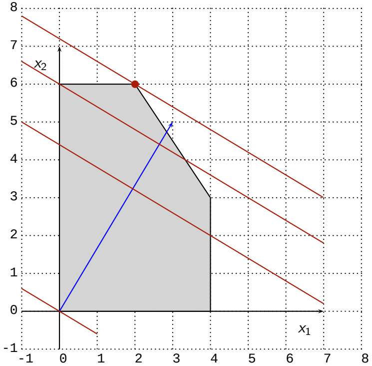
$\max \ 3000x_1 + 5000x_2$
$x_1 \leq 4$
$2x_2 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

$$\begin{aligned}
&\max \; 3000x_1 + 5000x_2 \\
&x_1 \leq 4 \\
&2x_2 \leq 12 \\
&3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



Soluzione ottima: $x_1 = 2, x_2 = 6$ (2 lotti del prodotto 1, 6 lotti del prodotto 2)
Valore ottimo $= 36000$ (profitto massimo 36000 €)

Esempio 2 - problema

Supponiamo ora che l'azienda decida di lanciare 4 nuovi articoli, invece che 2:

- una porta in vetro con intelaiatura in alluminio (prodotto 1)
- una finestra con intelaiatura in legno (prodotto 2)
- una porta in vetro con intelaiatura in legno (prodotto 3)
- una finestra con intelaiatura in alluminio (prodotto 4)

I tempi di produzione ed i profitti dei nuovi articoli sono indicati in tabella:

	Tempo di produzione per lotto (ore)				Tempo di produzione disponibile
Stabilimento	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Prod. 4	settimanalmente (ore)
1	1	0	0	2	4
2	0	2	1	0	12
3	3	2	4	3	18
Profitto per lotto (€)	3000	5000	4000	4500	

L'azienda vuole determinare quanti lotti deve produrre settimanalmente per ogni nuovo articolo, compatibilmente con le risorse a disposizione, in modo da massimizzare il profitto totale.

Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:

x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana
x_3 = numero di lotti di prodotto 3 realizzati in una settimana
x_4 = numero di lotti di prodotto 4 realizzati in una settimana

Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:

x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana
x_3 = numero di lotti di prodotto 3 realizzati in una settimana
x_4 = numero di lotti di prodotto 4 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 4500x_4$ (da massimizzare)

Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:

x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana
x_3 = numero di lotti di prodotto 3 realizzati in una settimana
x_4 = numero di lotti di prodotto 4 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 4500x_4$ (da massimizzare)

Vincoli:

$x_1 + 2x_4 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)

Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:

x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana
x_3 = numero di lotti di prodotto 3 realizzati in una settimana
x_4 = numero di lotti di prodotto 4 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 4500x_4$ (da massimizzare)

Vincoli:

$x_1 + 2x_4 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 + x_3 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)

Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:

x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana
x_3 = numero di lotti di prodotto 3 realizzati in una settimana
x_4 = numero di lotti di prodotto 4 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 4500x_4$ (da massimizzare)

Vincoli:

$x_1 + 2x_4 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 + x_3 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 18$ (produzione stabilimento 3)

Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:

x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana
x_3 = numero di lotti di prodotto 3 realizzati in una settimana
x_4 = numero di lotti di prodotto 4 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 4500x_4$ (da massimizzare)

Vincoli:

$x_1 + 2x_4 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 + x_3 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 18$ (produzione stabilimento 3)
$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0$

Esempio 2 - modello

Variabili decisionali:

x_1 = numero di lotti di prodotto 1 realizzati in una settimana
x_2 = numero di lotti di prodotto 2 realizzati in una settimana
x_3 = numero di lotti di prodotto 3 realizzati in una settimana
x_4 = numero di lotti di prodotto 4 realizzati in una settimana

Funzione obiettivo: $3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 4500x_4$ (da massimizzare)

Vincoli:

$x_1 + 2x_4 \leq 4$ (produzione stabilimento 1)
$2x_2 + x_3 \leq 12$ (produzione stabilimento 2)
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 18$ (produzione stabilimento 3)
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

Modello matematico (di programmazione lineare)

$$\begin{cases} \max\ 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 4500x_4 \\ x_1 + 2x_4 \leq 4 \\ 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$