

## Soluzione dell'esercizio sul rimpiazzo e manutenzione della fotocopiatrice

**Esercizio.** In un ufficio devono essere pianificati il rimpiazzo e la manutenzione della fotocopiatrice per i prossimi quattro anni. All'inizio del primo anno viene sostituita la precedente fotocopiatrice con una nuova. I costi di manutenzione aumentano al passare degli anni di utilizzo della stessa fotocopiatrice, in quanto la fotocopiatrice diventa sempre meno affidabile. I costi di manutenzione sono indicati in tabella:

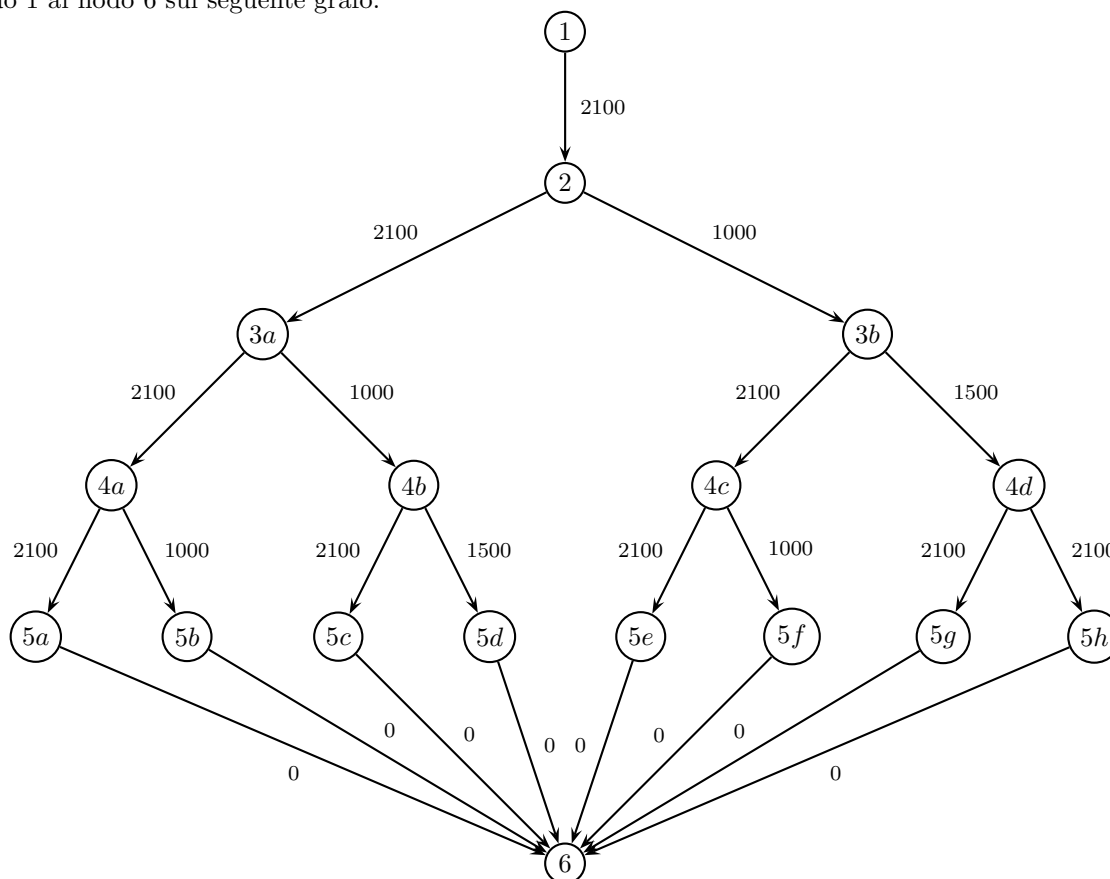
| Manutenzione | Costo  |
|--------------|--------|
| 1° anno      | 500 €  |
| 2° anno      | 1000 € |
| 3° anno      | 1500 € |
| 4° anno      | 2100 € |

Ogni anno esiste la possibilità di sostituire l'attuale fotocopiatrice con una completamente nuova pagando sempre 1600 €. Ad esempio, se si rimpiazza la fotocopiatrice ogni anno il costo è di  $(1600+500)$  € per 4 anni; invece se viene rimpiazzata solo all'inizio il costo è  $(1600+500+1000+1500+2100)$  €.

Il capo dell'ufficio deve decidere quante volte sostituire la fotocopiatrice e in quale anno, in modo da minimizzare il costo totale.

Formulare tale problema come un problema di cammino minimo su un opportuno grafo e trovare la soluzione ottima.

**Soluzione.** Il problema precedente si può formulare come problema di cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 6 sul seguente grafo.



Il nodo 1 rappresenta la situazione all'inizio del primo anno: poiché viene deciso di cambiare la fotocopiatrice e di pagare la manutenzione per il primo anno, è necessario pagare 2100 €; 2100 è il costo dell'arco  $(1, 2)$ .

Il nodo 2 rappresenta la situazione all'inizio del secondo anno, ci sono due possibilità: cambiare di nuovo la fotocopiatrice e pagare la manutenzione  $(1600+500)$  € oppure pagare solo 1000 € per il secondo anno di manutenzione. Gli archi  $(2, 3a)$  e  $(2, 3b)$  (ed i loro costi associati) rappresentano queste due alternative.

Analogamente, i due archi uscenti dal nodo  $3a$  rappresentano le due alternative possibili all'inizio del terzo anno, dopo che si è deciso di cambiare la fotocopiatrice all'inizio del secondo anno: cambiare di nuovo la fotocopiatrice e pagare il primo anno di manutenzione (2100 €) oppure pagare solo il secondo anno di manutenzione (1000 €). I due archi uscenti dal nodo  $3b$  rappresentano le due alternative possibili all'inizio del terzo anno, dopo che si è deciso di non cambiare la fotocopiatrice all'inizio del secondo anno: cambiare la fotocopiatrice e pagare il primo anno di manutenzione (2100 €) oppure pagare solo il terzo anno di manutenzione (1500 €).

In modo simile si costruiscono gli archi uscenti dai nodi  $4a, \dots, 4d$ . Infine, tutti i nodi  $5a, \dots, 5h$  vengono collegati con archi di costo nullo ad un nodo fittizio 6.

Ogni cammino dal nodo 1 al nodo 6 rappresenta una sequenza di scelte sul rimpiazzo e manutenzione della fotocopiatrice durante i 4 anni. Pertanto, il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 6 rappresenta la sequenza ottimale delle scelte da effettuare per minimizzare il costo totale.

Notiamo che la soluzione ottima del problema è data dalla sequenza  $1 - 2 - 3b - 4c - 5f - 6$  di costo 6200 €, ossia conviene cambiare la fotocopiatrice all'inizio del primo e del terzo anno e pagare solo la manutenzione negli altri anni.