

Soluzione dell'esercizio sul rimpiazzo e manutenzione della fotocopiatrice

Esercizio. In un ufficio devono essere pianificati il rimpiazzo e la manutenzione della fotocopiatrice per i prossimi quattro anni. All'inizio del primo anno viene sostituita la precedente fotocopiatrice con una nuova. I costi di manutenzione aumentano al passare degli anni di utilizzo della stessa fotocopiatrice, in quanto la fotocopiatrice diventa sempre meno affidabile. I costi di manutenzione sono indicati in tabella:

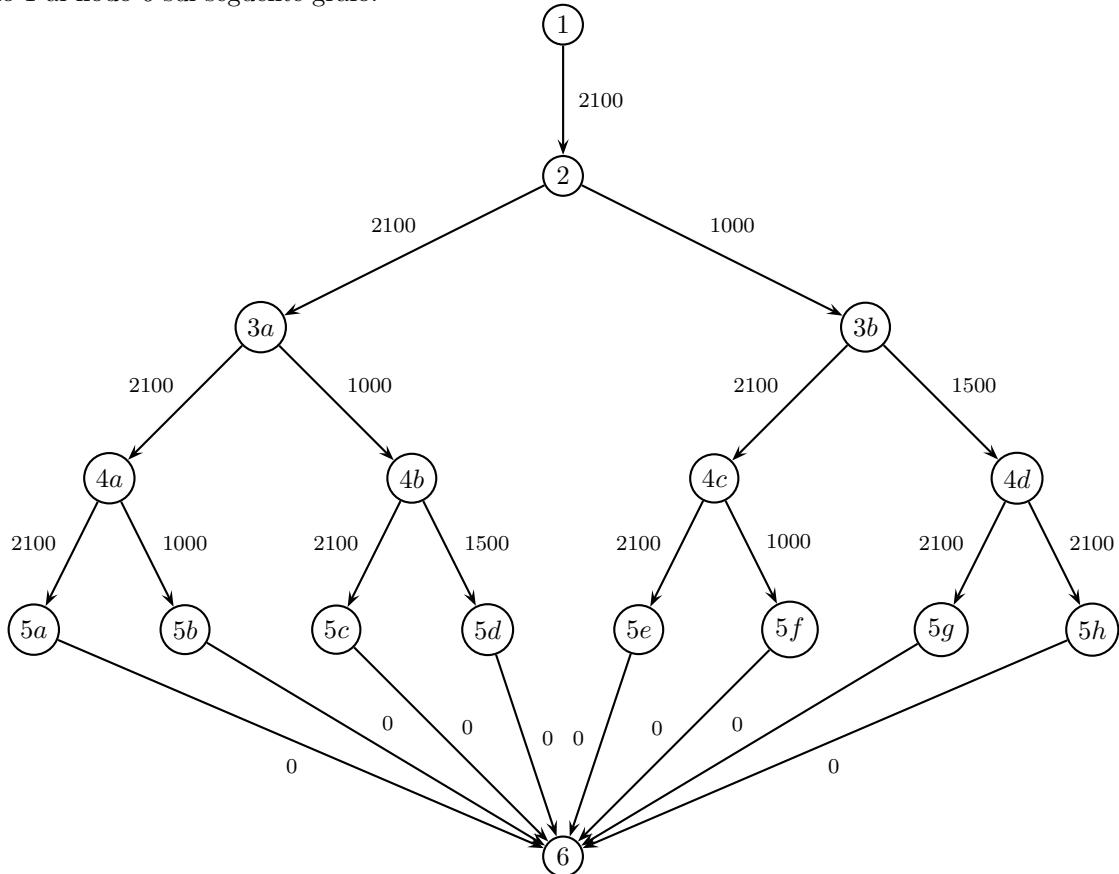
Manutenzione	Costo
1° anno	500 €
2° anno	1000 €
3° anno	1500 €
4° anno	2100 €

Ogni anno esiste la possibilità di sostituire l'attuale fotocopiatrice con una completamente nuova pagando sempre 1600 €. Ad esempio, se si rimpiazza la fotocopiatrice ogni anno il costo è di (1600+500) € per 4 anni; invece se viene rimpiazzata solo all'inizio il costo è (1600+500+1000+1500+2100) €.

Il capo dell'ufficio deve decidere quante volte sostituire la fotocopiatrice e in quale anno, in modo da minimizzare il costo totale.

Formulare tale problema come un problema di cammino minimo su un opportuno grafo e trovare la soluzione ottima.

Soluzione. Il problema precedente si può formulare come problema di cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 6 sul seguente grafo.



Il nodo 1 rappresenta la situazione all'inizio del primo anno: poiché viene deciso di cambiare la fotocopiatrice e di pagare la manutenzione per il primo anno, è necessario pagare 2100 €; 2100 è il costo dell'arco (1,2).

Il nodo 2 rappresenta la situazione all'inizio del secondo anno, ci sono due possibilità: cambiare di nuovo la fotocopiatrice e pagare la manutenzione (1600+500 €) oppure pagare solo 1000 € per il secondo anno di manutenzione. Gli archi (2,3a) e (2,3b) (ed i loro costi associati) rappresentano queste due alternative.

Analogamente, i due archi uscenti dal nodo $3a$ rappresentano le due alternative possibili all'inizio del terzo anno, dopo che si è deciso di cambiare la fotocopiatrice all'inizio del secondo anno: cambiare di nuovo la fotocopiatrice e pagare il primo anno di manutenzione (2100 €) oppure pagare solo il secondo anno di manutenzione (1000 €). I due archi uscenti dal nodo $3b$ rappresentano le due alternative possibili all'inizio del terzo anno, dopo che si è deciso di non cambiare la fotocopiatrice all'inizio del secondo anno: cambiare la fotocopiatrice e pagare il primo anno di manutenzione (2100 €) oppure pagare solo il terzo anno di manutenzione (1500 €).

In modo simile si costruiscono gli archi uscenti dai nodi $4a, \dots, 4d$. Infine, tutti i nodi $5a, \dots, 5h$ vengono collegati con archi di costo nullo ad un nodo fittizio 6.

Ogni cammino dal nodo 1 al nodo 6 rappresenta una sequenza di scelte sul rimpiazzo e manutenzione della fotocopiatrice durante i 4 anni. Pertanto, il cammino di costo minimo dal nodo 1 al nodo 6 rappresenta la sequenza ottimale delle scelte da effettuare per minimizzare il costo totale.

Notiamo che la soluzione ottima del problema è data dalla sequenza $1 - 2 - 3b - 4c - 5f - 6$ di costo 6200 €, ossia conviene cambiare la fotocopiatrice all'inizio del primo e del terzo anno e pagare solo la manutenzione negli altri anni.