## RICERCA OPERATIVA

**1)** Il capo della polizia privata SempreSecur deve decidere quanti poliziotti assegnare ai 24 turni di guardia nell'arco della giornata, sapendo che nell'ora $j$ occorrono almeno $p(j)$ poliziotti in servizio, $j = 1, \ldots, 24$. Ogni turno dura 8 ore, con la quinta ora di riposo. I 24 turni si distinguono per l'ora di inizio. Inoltre, per equilibrare le risorse, egli intende assegnare i poliziotti ai turni in modo che la differenza tra il numero di poliziotti assegnati al turno $i$ e al turno $i+1$ sia in valore assoluto non superiore ad una data soglia $v$, per $i = 1, \ldots, 23$.

Si formuli il problema del capo della polizia in termini di P.L.I., con l'obiettivo di minimizzare il numero totale di poliziotti assegnati ai turni.

**2)** In seguito alla chiusura delle scuole, gli $n$ bambini di un distretto scolastico devono essere assegnati a $m$ campi estivi per trascorrere il periodo delle vacanze. E' noto il grado di preferenza, $p_{ij}$, del bambino $i$, per $i = 1, \ldots, n$, nei confronti del campo estivo $j$, $j = 1, \ldots, m$. Sia poi $k$ il massimo numero di bambini che un singolo campo estivo può accogliere.

Per cercare di non scontentare troppo i bambini, si vuole determinare un assegnamento che massimizzi il minimo livello di preferenza associato ai campi estivi, dove il livello di preferenza di un campo estivo è definito come la somma dei gradi di preferenza dei bambini ad esso assegnati.

Si formuli il problema in termini di P.L.I.

**3)** Durante una serata di beneficienza per la raccolta di fondi per finanziare le ricerche in Ricerca Operativa, vengono messi in vendita $n$ oggetti donati dalle squadre di calcio di serie A. Alla serata partecipano $m$ imprenditori con $m \leq 2n$; ciascun imprenditore $i, i = 1, \ldots, m$, indica l'insieme $O(i)$ di oggetti che intende comprare e la somma massima $q_i$ che è disposto a spendere, fornendo anche il prezzo $c_{ij}$ che è disposto a pagare per ciascun oggetto $j \in O(i)$. Il comitato organizzatore decide quindi di assegnare gli oggetti agli imprenditori in modo da vendere tutti gli oggetti massimizzando il profitto della serata, rispettando le indicazioni da loro date e garantendo che a ciascun imprenditore siano assegnati almeno due oggetti.

Formulare il problema come problema di P.L.I.

**4)** Un'azienda vinicola ha $n$ clienti, ognuno dei quali richiede $b_i$ casse di vino, $i = 1, \ldots, n$. L'azienda decide di costruire $p$ cantine per rendere efficiente la distribuzione del vino ai clienti. Ognuna delle $p$ cantine può essere costruita con capacità $U$ oppure $u$ (espresse come numero di casse di vino). Per ogni cantina di capacità $U$, l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a $c_1$, mentre per ogni cantina di capacità $u$ l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a $c_2$. Sia $c_{ij}$ il costo sostenuto dall'azienda nel caso in cui il cliente $i$ si rifornisca dalla cantina $j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire le capacità delle $p$ cantine, e decidere l'assegnamento dei clienti alle cantine (ogni cliente va assegnato ad una sola cantina), in modo da soddisfare le richieste dei clienti e rispettare i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale sostenuto dall'azienda.

**5)** Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$: $N$ è l'insieme dei nodi logistici, mentre $A$ è l'insieme dei collegamenti potenziali tra i nodi. Il gestore della rete deve decidere quali collegamenti attivare (e, quindi, poter utilizzare) per inviare $d$ bancali dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Se attivato, sul collegamento $(i, j) \in A$ possono essere inviati al più $u_{ij}$ bancali.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere quali collegamenti attivare, e come effettuare l'invio dei $d$ bancali utilizzando i collegamenti attivati, in modo da minimizzare il massimo numero di bancali inviati su ciascun collegamento della rete.

**6)** Si consideri una rete di telecomunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. Il gestore della rete deve inviare un messaggio da un nodo sorgente $s \in N$ ad un nodo destinazione $t \in N$. Per velocizzare l'invio, ed evitare conflitti lungo i link della rete, il gestore decide di suddividere il messaggio in due pacchetti, e di inviare i due pacchetti simultaneamente lungo due cammini di $G$ da $s$ a $t$ formati da archi tra loro disgiunti. Indicando con $t_{ij}$ il tempo di transito lungo la linea $(i, j)$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di inviare i due pacchetti da $s$ a $t$ lungo due cammini disgiunti del grafo, in modo tale da minimizzare il tempo in cui l'intero messaggio giunge a destinazione, ossia il massimo tra i tempi di arrivo dei due pacchetti in $t$ (si assuma che il gestore invii simultaneamente i due pacchetti dal nodo $s$ al tempo zero).

**7)** Si formuli, in termini di P.L.I., il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio $c(x)$ di un'azienda, che vale 0 nel caso in cui la quantità $x$ di merce stoccata in magazzino sia compresa tra 0 e 10 bancali, ed è invece definito dalla funzione lineare $50 + x$ nel caso in cui il numero $x$ di bancali stoccati sia maggiore di 10 e minore o uguale della capacità del magazzino, che è pari a 100 bancali. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno $L$ bancali al mese. Si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

**8)** Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. La ditta *GoOn* vuole organizzare una spedizione lungo tale rete. Specificatamente, deve inviare $b$ pacchi dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Per motivi gestionali, *GoOn* richiede che il numero dei nodi della rete interessati dal transito dei pacchi, a parte $s$ e $t$, non sia superiore a $K$.

Noto il numero massimo di pacchi $u_{ij}$ inviabili lungo il collegamento $(i, j) \in A$, e noto il costo unitario di invio $c_{ij}$ lungo $(i, j)$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di effettuare l'invio da $s$ a $t$ a costo minimo, rispettando la capacità dei collegamenti ed il vincolo relativo al numero di nodi interessati dal transito.

**9)** Dopo avere finalmente superato l'esame di Ricerca Operativa, Tommaso è pronto per partire in vacanza. Tommaso sceglie $n$ oggetti che desidera portare con sè, e si pone il problema di mattere tali oggetti nel suo set di $m$ valigie, tutte indentiche tra loro. Individua tre sottoinsiemi di oggetti critici per il trasporto, vale a dire l'insieme $S$ delle paia di scarpe, l'insieme $A$ degli abiti facilmente spiegazzabili, e l'insieme $I$ degli oggetti per l'igiene personale. Per ovvie ragioni decide che nessun paio di scarpe possa essere inserito in valigia insieme ad un oggetto di igiene personale, e neppure insieme ad un abito spiegazzabile.

Sapendo che l'oggetto $i$ ha peso $p_i$, e che ogni valigia è in grado di contenere oggetti per un peso complessivo pari a $P$, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere come mettere gli oggetti nelle valigie minimizzando il numero di valigie utilizzate, nel rispetto dei vincoli di peso e dei vincoli di compatibilità tra oggetti.

**10)** La ditta *FastShip* deve caricare $n$ bancali su una nave avente $m$ stive. Sono noti il peso $p_i$ del bancale $i$ e la capacità $u_j$ della stiva $j$. Per motivi di stabilità del carico della nave, la stiva 1 e la stiva $m$ devono essere necessariamente utilizzate. Inoltre, la differenza in valore assoluto tra il peso totale degli oggetti caricati in tali due stive non deve eccedere una soglia di tolleranza prefissata $\varepsilon$.

Sapendo che l'utilizzo della stiva $j$ comporta il pagamento di un costo di manutenzione $f_j$, e che il caricamento del bancale $i$ nella stiva $j$ richiede un costo di caricamento $c_{ij}$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come caricare i bancali nelle stive della nave, in modo da rispettare il vincolo di stabilità del carico ed i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale derivante dalla manutenzione delle stive e dalle operazioni di caricamento.

**11)** L'agenzia di smaltimento rifiuti *PulitiSubito* deve aprire $k$ discariche in una importante regione italiana. A tal fine individua un insieme $J$ di siti candidati all'apertura di una discarica, con $|J| \geq k$. L'agenzia censisce inoltre l'insieme $I$ dei principali centri abitati della regione, e stima le distanze $d_{ij}$ intercorrenti tra il centro abitato $i \in I$ e il sito candidato $j \in J$.

Considerando come discarica *critica* per il centro abitato $i \in I$ la discarica più vicina a $i$ tra quelle aperte, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere dove aprire le $k$ discariche in modo da massimizzare la somma delle distanze intercorrenti tra ogni centro abitato e la relativa discarica critica.

**12)** Dopo la caduta del governo, il Grande Leader del Partito Azzurro sta attentamente pianificando la rivincita elettorale per la Grande Coalizione, che comprende anche gli alleati del Partito Nero. Il territorio nazionale è diviso in $n$ collegi uninominali, in cui vince un seggio il candidato che ottiene il maggior numero di voti. Il Partito ha una lista di $n$ personalità disposte a candidarsi, ed i sondaggisti del Grande Leader gli assicurano che la Coalizione vincerà in tutti i collegi uninominali, indipendentemente dal candidato prescelto. Il numero di voti che un candidato prende è anche rilevante ai fini della quota proporzionale: per ciascun collegio $i$ e personalità $j$ si conosce il numero di voti $v_{ij}$ che il candidato prenderebbe se si presentasse in quel collegio, ed il partito riceverà un ulteriore seggio ogni $\delta$ voti ottenuti dai propri candidati eletti. Infine, esiste un premio di maggioranza su base regionale: gli $n$ collegi sono raggruppati in 21 regioni $R_h$, $h = 1, \ldots, 21$, ed il partito che conquista la maggioranza dei collegi nella regione $h$ ha diritto ad altri $r_h$ deputati.

Il Grande Leader deve decidere la spartizione dei collegi. Gli accordi col Partito Nero stabiliscono che non più del 60% dei candidati della Coalizione potrà appartenere al Partito Azzurro, e che il Partito Azzurro non dovrà vincere il premio di maggioranza in più di 13 regioni su 21. Per evitare qualsiasi problema di ribaltone, il Grande Leader vuole determinare in quali collegi presentare un candidato del suo partito, ed eventualmente quale, in modo che il numero totale di deputati ottenuti sia massimo; se il numero totale di voti ottenuti non è multiplo di $\delta$ nella massimizzazione si valuta anche la parte frazionaria. Si formuli come *PLI* il problema corrispondente.

**13)** Si considerino due insiemi di soluzioni ammissibili. Il primo insieme è così definito:

$$T_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 200, x_1 \leq 50\}.$$

Il secondo insieme è invece definito come segue:

$$T_2 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 \leq 500\}.$$

Si caratterizzi, utilizzando vincoli di tipo P.L.I., l'unione dei due insiemi di soluzioni ammissibili, giustificando la risposta.

**14)** La ENRI (ENergie RInnovabili) deve pianificare l'utilizzo delle sue centrali elettriche per la giornata di domani. ENRI conosce la domanda di energia elettrica $d_t$ (KWh) di tutti i suoi clienti per ciascuna ora $t = 1, \ldots, 24$. Conosce inoltre la quantità $p_t$ (KWh) di energia elettrica che le sue centrali fotovoltaiche ed eoliche produrranno; a ragione della elevata variabilità di queste ultime, è possibile che la produzione da fonti rinnovabili non sia sufficiente a coprire la domanda. Per questo ENRI può utilizzare come scorta $n$ centrali tradizionali a combustibili fossili. Ciascuna centrale $h$ può essere accesa una volta sola nella giornata, ad un prefissato orario $t_h$. Per la prima ora di funzionamento segue un programma di accensione prestabilito in cui produce esattamente $a_h$ KWh. Dalla seconda ora la centrale entra nello stato stazionario, in cui può variare a piacere, in ogni ora, l'energia prodotta tra un minimo $l_h$ ed un massimo $u_h$ (KWh). Lo stato stazionario dura esattamente $s_h$ ore; all'ora $t_h + s_h + 1$ la centrale deve eseguire un programma di spengimento prestabilito, simmetrico a quello di accensione, in cui produce $a_h$ KWh, e dall'ora successiva la centrale è spenta. Il costo di produrre un KWh (in qualsiasi fase di funzionamento) con la centrale è pari a $f_h$. Se la produzione complessiva di energia, rinnovabile e non, di ENRI non è sufficiente a coprire la domanda all'ora $t$, la porzione rimanente deve essere acquistata sul mercato ad un prezzo unitario $c_t$; se, viceversa, la produzione di energia è superiore alla domanda, il surplus viene venduto sul mercato allo stesso prezzo. Si formuli come *PLI* il problema di decidere quali centrali accendere, ed a che potenza farle operare durante lo stato stazionario, in modo da massimizzare il profitto per ENRI, dato dalla differenza tra il guadagno dovuto alla vendita del surplus sul mercato ed il costo dovuto sia all'approvvigionamento dell'energia mancante sul mercato sia al costo di produzione di energia.

**15)** Il porto di Livorno deve gestire il problema dello scarico delle merci dalle navi in arrivo. Si supponga che sia in arrivo una nave avente $m$ stive, le quali possono essere svuotate in parallelo mediante camion (in numero da stabilire, ma non superiore a $P$ camion per stiva) da assegnare alle singole stive. Il gestore del porto viene informato che, se la stiva $i$ viene svuotata utilizzando $p$ camion, sono necessarie $t_{pi}$ unità di tempo per svuotare la stiva e deve essere pagato un costo di noleggio $c_p$. Per motivi di equità, si vuole che ogni stiva sia svuotata entro $T$ unità di tempo. Inoltre, per motivi economici si vuole che il costo complessivo di noleggio dei camion non superi la soglia $C$. Si formuli il problema di assegnare i camion alle stive in modo da soddisfare il vincolo temporale ed il vincolo di costo richiesti, minimizzando il numero complessivo di camion utilizzati.

**16)** Il nuovo network *Radio Maya the Bee* vuole che le proprie trasmissioni radiofoniche raggiungano le $m$ città presenti in una data regione. Per far ciò vuole affittare le 3 fasce orarie di trasmissione (6-14, 14-22, 22-6) dalle $n$ stazioni di ripetitori radio già presenti sul territorio, in modo da garantire che tutte le città ricevano sempre le trasmissioni nelle 24 ore. Per ogni città $i$ si conosce l'insieme $S(i)$ delle stazioni che possono garantire il segnale per la città in qualunque fascia oraria. Per affittare dalla stazione $j$ la fascia oraria $k$, il network deve pagare un costo $c_{jk}$. Sapendo che, secondo le vigenti leggi regionali sulla concorrenza, ogni stazione può affittare al network al più 2 fasce orarie al giorno, si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire da quali stazioni il network deve affittare le varie fasce orarie minimizzando la spesa sostenuta e garantendo il segnale per tutte le città nelle 24 ore.

**17)** La direzione marketing della finanziaria *PonziGonzi* decide di aprire $p$ filiali per servire $n$ clienti. Il volume di lavoro portato dal cliente $i$ richiede mensilmente $d_i$ ore di lavoro, mentre la filiale $j$ ha una capacità lavorativa di $u_j$ ore mensili. Il Consiglio di Amministrazione della *PonziGonzi* ritiene che una filiale sia profittevole se il numero di ore lavorate mensilmente a servizio dei suoi clienti sia almeno il 70% della capacità lavorativa della filiale stessa. Si aiuti la direzione marketing a stabilire un piano di servizio, formulando in termini di P.L.I. il problema di assegnare ciascun cliente ad una ed una sola filiale in modo da massimizzare il numero delle filiali profittevoli.

**18)** Gli $n$ conferenzieri di un convegno scientifico alle Hawaii devono essere portati in tour presso un'isola dell'arcipelago. Per il trasbordo sono disponibili $m$ barche. Sia $u_j$ il massimo numero di passeggeri imbarcabili sulla barca $j$. Le imbarcazioni a disposizione differiscono non solo in termini di capacità, ma anche come servizi offerti a bordo. Ogni conferenziere segnala quindi su quali barche gradirebbe essere imbarcato. Noto il peso $p_i$ di ciascun conferenziere $i$, per garantire un'equa distribuzione del carico, l'organizzatore del tour decide di ripartire i conferenzieri tra le barche in modo da minimizzare il massimo carico di tutte le barche, considerando come carico di una barca esclusivamente il peso dei passeggeri imbarcati. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di ripartire i conferenzieri tra le barche, rispettando le preferenze dei conferenzieri e soddisfacendo i vincoli di capacità, in modo da minimizzare il massimo carico di tutte le barche *(suggerimento: utilizzare una matrice di dati per rappresentare le preferenze dei conferenzieri)*.

**19)** La nuova rete stradale del *Regno di Trinacria* che collega le $n$ città dell'isola è stata appena inaugurata. La rete stradale è costituita da $m$ tratte ed il pedaggio della tratta $(i, j)$, che collega le città $i$ e $j$ con un tempo di percorrenza $t_{ij}$, è stato fissato a $s_{ij}$ pierreali. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di spostarsi dalla raggiante città di *Katane* alla splendente città di *Zyz* sulla rete stradale in modo da minimizzare il tempo totale di percorrenza ma spendendo al più $K$ pierreali.

**20)** La rete di intelligence *BuBuSettete* è costituita da $n$ informatori e $m$ agenti. Per garantire la sicurezza delle comunicazioni ciascun informatore $i$ potrà interagire con un solo agente scelto nell'insieme $P(i) \subseteq \{1, \ldots, m\}$ degli agenti di sua fiducia. I dati forniti settimanalmente dall'informatore $i$ richiedono un tempo di elaborazione $t_i$ e ciascun agente può può processarli soltanto in maniera sequenziale. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare gli informatori agli agenti, rispettando le preferenze degli informatori, in modo da minimizzare il tempo totale di elaborazione dell'agente con il maggior carico.

**21)** Judy, la nuova segretaria dell'importante compagnia *FromNineToFive*, deve sbrigare $m$ pratiche. Conoscendo il tempo $t_i$ necessario a sbrigare la pratica $i$, decide di sbrigarne alcune al mattino e di rimandare le altre al pomeriggio. Per equilibrare il proprio carico di lavoro, Judy decide di ripartire le pratiche in modo da minimizzare il massimo tra il tempo dedicato alle pratiche al mattino e quello loro dedicato al pomeriggio. Aiuta Judy a decidere quali pratiche svolgere al mattino e quali al pomeriggio, formulando il problema in termini di P.L.I.

**22)** Ritiratosi a meditare nelle profondità di una caverna, *Aristocle* ha portato con sé i 10 tomi in cui sono raccolte le sue opere. Spaventato da ombre e da un'eco costante, decide di mettere al riparo i tomi dentro una cavità della parete, in cui però non possono entrare tutti. Aristocle stima in $U$ il volume della cavità e in $a_i$ il volume del tomo $i$, a cui attribuisce un valore $p_i$. Per agevolare la scelta decide inoltre che:

- al più uno tra i tomi 1, 2 e 3 può venir inserito nella cavità,
- almeno uno tra i tomi 3, 7 e 10 deve essere inserito nella cavità,
- il tomo 5 può essere inserito solo se viene inserito anche il tomo 9,
- se il tomo 9 viene inserito, allora deve essere inserito almeno uno tra i tomi 2 e 7.

Aiuta Aristocle a decidere quali tomi inserire nella cavità nel rispetto della sua capacità e delle condizioni sopra elencate in modo da massimizzare il valore complessivo dei tomi selezionati. A tal fine si formuli il problema in termini di P.L.I.

**23)** L'importante gruppo commerciale *Pentathlon* ha deciso di aprire $m$ punti vendita per rifornire $n$ società di atletica leggera. Sia $u_j$ il massimo numero di società che il punto vendita $j$ è in grado di rifornire. Un'indagine di mercato ha permesso di stimare il coefficiente di soddisfacimento $s_{ij}$ della società $i$ nel caso in cui venisse rifornita dal punto vendita $j$. Se il soddisfacimento totale delle società rifornite dal punto vendita $j$ risulterà maggiore o uguale ad una prefissata soglia $S$, il punto vendita riceverà un premio $p_j$ dalla Federazione di Atletica Leggera. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare le $n$ società agli $m$ punti vendita massimizzando la somma dei premi ricevuti dai punti vendita nel rispetto dei vincoli di capacità.

**24)** La multinazionale *Fishbus*, leader nel commercio di pesce surgelato, decide di aprire $m$ magazzini per rifornire gli $n$ mercati della Longobardia. La capacità di ogni magazzino può essere scelta tra $q_1$, $q_2$, $q_3$ e $q_4$ quintali di pesce a seconda delle esigenze dell'azienda. Il costo di apertura di ogni magazzino è proporzionale alla capacità scelta, dove $c$ individua il costo per quintale (se un magazzino viene aperto con capacità $q_i$ quintali, il relativo costo di apertura è $cq_i$). La domanda del mercato $i$ è stimata in $d_i$ quintali. Si aiuti la multinazionale a decidere la capacità dei magazzini e quali mercati assegnare a ciascun magazzino, in modo da minimizzare il costo totale di apertura nel rispetto delle capacità scelte. Al tal fine si formuli il problema in termini di P.L.I.

## RICERCA OPERATIVA - Modelli

**1)** Il capo della polizia privata SempreSecur deve decidere quanti poliziotti assegnare ai 24 turni di guardia nell'arco della giornata, sapendo che nell'ora $j$ occorrono almeno $p(j)$ poliziotti in servizio, $j = 1, \ldots, 24$. Ogni turno dura 8 ore, con la quinta ora di riposo. I 24 turni si distinguono per l'ora di inizio. Inoltre, per equilibrare le risorse, egli intende assegnare i poliziotti ai turni in modo che la differenza tra il numero di poliziotti assegnati al turno $i$ e al turno $i + 1$ sia in valore assoluto non superiore ad una data soglia $v$, per $i = 1, \ldots, 23$.

Si formuli il problema del capo della polizia in termini di P.L.I., con l'obiettivo di minimizzare il numero totale di poliziotti assegnati ai turni.

### SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili intere $x_i$ che indicano il numero di poliziotti assegnati al turno $i$, $i = 1, \ldots, 24$. La relazione tra i turni e le ore in cui i poliziotti sono effettivamente in servizio è data dalla matrice $24 \times 24$ i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se i poliziotti assegnati al turno } i \text{ sono in servizio all'ora } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, 24.$$

Il numero totale di poliziotti assegnati ai turni (che deve essere minimizzato) è quindi: $\sum_{i=1}^{24} x_i$.

I vincoli che garantiscono la copertura minima richiesta sono: $\sum_{i=1}^{24} a_{ij} x_i \geq p(j), \quad j = 1, \ldots, 24.$

I vincoli sulla distribuzione $|x_i - x_{i+1}| \leq v,\ i = 1, \ldots, 23$, non lineari, possono venire equivalentemente espressi tramite l'insieme di vincoli lineari

$$x_i - x_{i+1} \leq v, \quad i = 1, \ldots, 23$$

$$x_{i+1} - x_i \leq v, \quad i = 1, \ldots, 23.$$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$
\begin{array}{lll}
(P) \quad \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{24} x_i & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{24} a_{ij} x_i \geq p(j) & j = 1, \ldots, 24 \\
& x_i - x_{i+1} \leq v & i = 1, \ldots, 23 \\
& x_{i+1} - x_i \leq v & i = 1, \ldots, 23 \\
& x_i \in \mathbb{Z}_+ & i = 1, \ldots, 24
\end{array}
$$

**2)** In seguito alla chiusura delle scuole, gli $n$ bambini di un distretto scolastico devono essere assegnati a $m$ campi estivi per trascorrere il periodo delle vacanze. E' noto il grado di preferenza, $p_{ij}$, del bambino $i$, per $i = 1, \dots, n$, nei confronti del campo estivo $j$, $j = 1, \dots, m$. Sia poi $k$ il massimo numero di bambini che un singolo campo estivo può accogliere.

Per cercare di non scontentare troppo i bambini, si vuole determinare un assegnamento che massimizzi il minimo livello di preferenza associato ai campi estivi, dove il livello di preferenza di un campo estivo è definito come la somma dei gradi di preferenza dei bambini ad esso assegnati.

Si formuli il problema in termini di P.L.I.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le variabili intere

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il bambino } i \text{ viene assegnato al campo estivo } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, n, \quad j = 1, ..., m$$

Ciascun bambino deve venir assegnato ad un campo estivo:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, ..., n.$$

Un singolo campo estivo può ospitare al massimo $k$ bambini:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq k, \qquad j = 1, ..., m.$$

Il livello di preferenza del campo estivo $j$ è dato da:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_{ij}.$$

Quindi per massimizzare il minimo di queste quantità è sufficiente introdurre una nuova variabile $v$ (il cui valore andrà massimizzato) ed introdurre i vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \geq v \qquad j = 1, ..., m.$$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$\begin{array}{lll}
(P) \quad \max & v & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, & i = 1, \dots, n, \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq k, & j = 1, ..., m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \geq v, & j = 1, ..., m \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m.
\end{array}$$

**3)** Durante una serata di beneficienza per la raccolta di fondi per finanziare le ricerche in Ricerca Operativa, vengono messi in vendita $n$ oggetti donati dalle squadre di calcio di serie A. Alla serata partecipano $m$ imprenditori con $m \leq 2n$; ciascun imprenditore $i, i = 1, \ldots, m$, indica l'insieme $O(i)$ di oggetti che intende comprare e la somma massima $q_i$ che è disposto a spendere, fornendo anche il prezzo $c_{ij}$ che è disposto a pagare per ciascun oggetto $j \in O(i)$. Il comitato organizzatore decide quindi di assegnare gli oggetti agli imprenditori in modo da vendere tutti gli oggetti massimizzando il profitto della serata, rispettando le indicazioni da loro date e garantendo che a ciascun imprenditore siano assegnati almeno due oggetti.

Formulare il problema come problema di P.L.I.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'oggetto } j \text{ viene assegnato all'imprenditore } i, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j \in O(i).$$

Le variabili devono rispettare i seguenti insiemi di vincoli:

- ogni oggetto viene assegnato ad un imprenditore: $\displaystyle\sum_{i: j \in O(i)} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n;$
- ogni imprenditore non spende più di quanto deciso: $\displaystyle\sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij} \leq q_i, \quad i = 1, \ldots, m;$
- ogni imprenditore acquista almeno due oggetti: $\displaystyle\sum_{j \in O(i)} x_{ij} \geq 2, \quad i = 1, \ldots, m.$

La funzione obiettivo, da massimizzare, è data dal profitto globale della serata: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij}.$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$(P) \quad \max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i: j \in O(i)} x_{ij} &= 1 && j = 1, \ldots, n \\
\sum_{j \in O(i)} c_{ij} x_{ij} &\leq q_i && i = 1, \ldots, m \\
\sum_{j \in O(i)} x_{ij} &\geq 2 && i = 1, \ldots, m \\
x_{ij} &\in \{0, 1\} && i = 1, \ldots, m, \quad j \in O(i).
\end{aligned}$$

**4)** Un'azienda vinicola ha $n$ clienti, ognuno dei quali richiede $b_i$ casse di vino, $i = 1, \dots, n$. L'azienda decide di costruire $p$ cantine per rendere efficiente la distribuzione del vino ai clienti. Ognuna delle $p$ cantine può essere costruita con capacità $U$ oppure $u$ (espresse come numero di casse di vino). Per ogni cantina di capacità $U$, l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a $c_1$, mentre per ogni cantina di capacità $u$ l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a $c_2$. Sia $c_{ij}$ il costo sostenuto dall'azienda nel caso in cui il cliente $i$ si rifornisca dalla cantina $j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire le capacità delle $p$ cantine, e decidere l'assegnamento dei clienti alle cantine (ogni cliente va assegnato ad una sola cantina), in modo da soddisfare le richieste dei clienti e rispettare i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale sostenuto dall'azienda.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le seguenti $np$ variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato alla cantina } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p.$$

I vincoli di semiassegnamento, che garantiscono che ogni cliente sia assegnato ad una ed una sola cantina, sono:

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Introduciamo inoltre $p$ variabili logiche, per decidere la capacità delle $p$ cantine:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se la cantina } j \text{ è costruita con capacità } U, \\ 0, & \text{se la cantina } j \text{ è costruita con capacità } u, \end{cases} \qquad j = 1, \dots, p.$$

Devono essere rispettati i seguenti vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_{ij} \le U y_j + u(1 - y_j), \qquad j = 1, \dots, p.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di assegnamento più il costo totale di costruzione delle $p$ cantine:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{p} (c_1 y_j + c_2(1 - y_j))$$

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{p} (c_1 y_j + c_2(1 - y_j)) \\ & \sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 1 && i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} b_i x_{ij} \le U y_j + u(1 - y_j) && j = 1, \dots, p \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p \\ & y_j \in \{0, 1\} && j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

**5)** Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$: $N$ è l'insieme dei nodi logistici, mentre $A$ è l'insieme dei collegamenti potenziali tra i nodi. Il gestore della rete deve decidere quali collegamenti attivare (e, quindi, poter utilizzare) per inviare $d$ bancali dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Se attivato, sul collegamento $(i, j) \in A$ possono essere inviati al più $u_{ij}$ bancali.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere quali collegamenti attivare, e come effettuare l'invio dei $d$ bancali utilizzando i collegamenti attivati, in modo da minimizzare il massimo numero di bancali inviati su ciascun collegamento della rete.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il collegamento } (i,j) \text{ viene attivato,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A.$$

Introduciamo inoltre variabili di flusso $x_{ij} \geq 0$, intere, dove $x_{ij}$ indica il numero di bancali inviati sul collegamento $(i, j) \in A$. L'invio di $d$ bancali dal nodo $s$ al nodo $t$ può essere espresso mediante i seguenti vincoli di conservazione di flusso:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -d, & i = s \\ 0, & i \in N, i \neq s, t \\ d, & i = t \end{cases}$$

Per garantire che si possa effettuare un invio lungo un collegamento $(i, j)$ solo se $(i, j)$ è stato attivato, rispettando il relativo vincolo di capacità, introduciamo i seguenti vincoli:

$$x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij}, \qquad (i,j) \in A.$$

Per stimare il massimo numero di bancali inviato sui collegamenti della rete, introduciamo una variabile ausiliaria $v$, ed introduciamo i vincoli

$$x_{ij} \leq v, \qquad (i,j) \in A.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è $v$. La formulazione del problema è pertanto:

$$\begin{array}{ll} \min & v \\ & \displaystyle\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -d, & i = s \\ 0, & i \in N, i \neq s, t \\ d, & i = t \end{cases} \\ & x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij} \qquad (i,j) \in A \\ & x_{ij} \leq v \qquad (i,j) \in A \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i,j) \in A \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \qquad (i,j) \in A. \end{array}$$

**6)** Si consideri una rete di telecomunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. Il gestore della rete deve inviare un messaggio da un nodo sorgente $s \in N$ ad un nodo destinazione $t \in N$. Per velocizzare l'invio, ed evitare conflitti lungo i link della rete, il gestore decide di suddividere il messaggio in due pacchetti, e di inviare i due pacchetti simultaneamente lungo due cammini di $G$ da $s$ a $t$ formati da archi tra loro disgiunti. Indicando con $t_{ij}$ il tempo di transito lungo la linea $(i, j)$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di inviare i due pacchetti da $s$ a $t$ lungo due cammini disgiunti del grafo, in modo tale da minimizzare il tempo in cui l'intero messaggio giunge a destinazione, ossia il massimo tra i tempi di arrivo dei due pacchetti in $t$ (si assuma che il gestore invii simultaneamente i due pacchetti dal nodo $s$ al tempo zero).

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo i seguenti due gruppi di variabili di flusso:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se la linea } (i,j) \in A \text{ è utilizzata per inviare il pacchetto } k \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A, k = 1, 2.$$

Introduciamo inoltre una variabile di soglia $z$ che rappresenta una valutazione superiore del massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in $t$.

Il problema può essere formulato come segue:

$$(P) \quad \begin{array}{lll} \min & z & \\ & \displaystyle\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s, \\ \ \ 1 & \text{se } i = t, \\ \ \ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N, k = 1, 2 \\ & x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq 1 & (i,j) \in A \\ & \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij}^1 \leq z & \\ & \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij}^2 \leq z & \\ & x_{ij}^k \in \{0, 1\} & (i,j) \in A, k = 1, 2 \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli (di conservazione del flusso per i due flussi $\{x_{ij}^1\}$ e $\{x_{ij}^2\}$) esprime la richiesta relativa all'invio dei due pacchetti da $s$ a $t$. Il secondo blocco di vincoli garantisce che i due cammini di $G$ utilizzati siano formati da sottoinsiemi di archi tra loro disgiunti. Infine, gli ultimi due vincoli impongono che $z$ sia una valutazione superiore del tempo di arrivo in $t$ di entrambi i pacchetti: minimizzando $z$ si minimizza il tempo di arrivo dell'intero messaggio al nodo $t$.

**7)** Si formuli, in termini di P.L.I., il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio $c(x)$ di un'azienda, che vale 0 nel caso in cui la quantità $x$ di merce stoccata in magazzino sia compresa tra 0 e 10 bancali, ed è invece definito dalla funzione lineare $50 + x$ nel caso in cui il numero $x$ di bancali stoccati sia maggiore di 10 e minore o uguale della capacità del magazzino, che è pari a 100 bancali. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno $L$ bancali al mese. Si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

**SVOLGIMENTO**

Il costo di stoccaggio dell'azienda è definito come:

$$c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 50 + x, & \text{se } 10 < x \leq 100. \end{cases}$$

$c(x)$ è una funzione lineare a tratti, con due tratti, da minimizzare. La peculiarità di tale funzione è che essa vale zero nel primo tratto ($0 \leq x \leq 10$). Il problema può essere formulato introducendo una variabile decisionale $y$ che distingua il caso in cui il numero $x$ di bancali in magazzino appartenga al primo intervallo, vale a dire $0 \leq x \leq 10$ ($y = 0$), dal caso in cui il numero di bancali appartenga all'intervallo $10 \leq x \leq 100$ ($y = 1$). Per distingure inoltre la variabilità di $x$ nel primo e nel secondo intervallo introduciamo una variabile $z_1$, che descrive la quantità di stock $x$ nel primo intervallo, ed una variabile $z_2$, che descrive la quantità di stock $x$ nel secondo intervallo. Introduciamo pertanto i vincoli $0 \leq z_1 \leq 10(1-y)$ e $10y \leq z_2 \leq 100y$. Essendo mutuamente esclusivi, il legame tra $x$, $z_1$ e $z_2$ è espresso da $x = z_1 + z_2$. Bisogna inoltre imporre che la quantità stoccata sia maggiore o uguale a $L$: $z_1 + z_2 \geq L$. La funzione obiettivo, da minimizzare, è $g(z_1, z_2, y) = 50y + z_2$. Si ottiene quindi la seguente formulazione:

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & 50y + z_2 \\ & & 0 \leq z_1 \leq 10(1-y) \\ & & 10y \leq z_2 \leq 100y \\ & & z_1 + z_2 \geq L \\ & & y \in \{0, 1\} \end{array}$$

*Dimostrazione di correttezza*

Quando $y = 0$ si ha $0 \leq z_1 \leq 10$ mentre $z_2 = 0$: la quantità $x$ di merce in magazzino varia quindi nel primo intervallo ($x = z_1$). Il corrispondente valore della funzione obiettivo è $g(z_1, 0, 0) = 0$, in accordo con $c(x)$.

Quando invece $y = 1$ si ha $z_1 = 0$ mentre $10 \leq z_2 \leq 100$: la quantità $x$ di merce in magazzino varia quindi nel secondo intervallo ($x = z_2$). In corrispondenza di tali valori di $x$ la funzione obiettivo assume l'andamento lineare $g(0, z_2, 1) = 50 + z_2$, vale a dire $50 + x$, in accordo con $c(x)$ per $x > 10$. Osserviamo che il punto di discontinuità, $x = 10$, è rappresentato in (P) in modo duplice:

- $(z_1, z_2, y) = (10, 0, 0)$: in tal caso $g(10, 0, 0) = c(10) = 0$;
- $(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$: in tal caso $g(0, 10, 1) = 60 > c(10) = 0$;

$(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$ non è pertanto una rappresentazione corretta di $x = 10$. Poichè tuttavia $g(z_1, z_2, y)$ viene minimizzata, e $g(0, 10, 1) = 60 > g(10, 0, 0) = 0$, la rappresentazione $(z_1, z_2, y) = (0, 10, 1)$ non può costituire la soluzione ottima, e quindi l'ambiguità della rappresentazione di $x = 10$ è risolta a livello di ottimizzazione. (P) è quindi una rappresentazione corretta del problema.

**8)** Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. La ditta *GoOn* vuole organizzare una spedizione lungo tale rete. Specificatamente, deve inviare $b$ pacchi dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Per motivi gestionali, *GoOn* richiede che il numero dei nodi della rete interessati dal transito dei pacchi, a parte $s$ e $t$, non sia superiore a $K$.

Noto il numero massimo di pacchi $u_{ij}$ inviabili lungo il collegamento $(i, j) \in A$, e noto il costo unitario di invio $c_{ij}$ lungo $(i, j)$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di effettuare l'invio da $s$ a $t$ a costo minimo, rispettando la capacità dei collegamenti ed il vincolo relativo al numero di nodi interessati dal transito.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema introduciamo le variabili di flusso $x_{ij}$, che indicano il numero di pacchi inviati lungo il collegamento $(i, j) \in A$. Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ è interessato dal transito} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i \in N \setminus \{s, t\}.$$

Il problema può essere formulato come segue:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} 0, & i \in N, i \neq s, t \\ -b, & i = s \\ b, & i = t \end{cases}$$

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} \leq b y_i \qquad i \in N \setminus \{s, t\}$$

$$\sum_{i\in N\setminus\{s,t\}} y_i \leq K$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad (i, j) \in A$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \qquad (i, j) \in A$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad i \in N \setminus \{s, t\}$$

Il primo blocco di vincoli garantisce l'invio di $b$ pacchi da $s$ a $t$. Il secondo blocco di vincoli garantisce che, se un nodo $i \in N \setminus \{s, t\}$ è interessato dal transito dei pacchi (quindi nel nodo $i$ entra un flusso positivo), allora la variabile $y_i$ sia forzata ad assumere il valore 1. Il terzo vincolo assicura che il numero di nodi interessati dal transito, salvo $s$ e $t$, sia al più $K$. L'ultimo blocco di vincoli garantisce il rispetto delle capacità dei collegamenti. Infine, la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il costo complessivo di invio.

**9)** Dopo avere finalmente superato l'esame di Ricerca Operativa, Tommaso è pronto per partire in vacanza. Tommaso sceglie $n$ oggetti che desidera portare con sè, e si pone il problema di mettere tali oggetti nel suo set di $m$ valigie, tutte indentiche tra loro. Individua tre sottoinsiemi di oggetti critici per il trasporto, vale a dire l'insieme $S$ delle paia di scarpe, l'insieme $A$ degli abiti facilmente spiegazzabili, e l'insieme $I$ degli oggetti per l'igiene personale. Per ovvie ragioni decide che nessun paio di scarpe possa essere inserito in valigia insieme ad un oggetto di igiene personale, e neppure insieme ad un abito spiegazzabile.

Sapendo che l'oggetto $i$ ha peso $p_i$, e che ogni valigia è in grado di contenere oggetti per un peso complessivo pari a $P$, si formuli in termini di $PLI$ il problema di decidere come mettere gli oggetti nelle valigie minimizzando il numero di valigie utilizzate, nel rispetto dei vincoli di peso e dei vincoli di compatibilità tra oggetti.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le variabili di assegnamento $x_{ij}$ tali che:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'oggetto } i \text{ vien inserito nella valigia } j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, .., n, \quad j = 1, .., m.$$

Introduciamo inoltre le variabili binarie $y_j$ tali che:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se si utilizza la valigia } j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, ..m.$$

Una formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{m} y_j \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 && i = 1, .., n \\ & \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \le P y_j && j = 1, ..m \\ & x_{ij} + x_{hj} \le 1 && i \in S, \quad h \in I, \quad j = 1, ..m \\ & x_{ij} + x_{hj} \le 1 && i \in S, \quad h \in A, \quad j = 1, ..m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, ..n, \quad j = 1, ..m \\ & y_j \in \{0, 1\} && j = 1, ..m \end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli rappresenta i vincoli di semiassegnamento (degli oggetti alle valigie). Il secondo blocco di vincoli garantisce il soddisfacimento dei vincoli di peso. Inoltre assicura che, se un oggetto viene assegnato ad una valigia $j$, questa venga utilizzata (e quindi $y_j = 1$). Il terzo blocco di vincoli costituisce i vincoli di compatibilità tra le scarpe, gli abiti spiegazzabili e gli oggetti per l'igiene personale. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il numero totale di valigie utilizzate.

**10)** La ditta *FastShip* deve caricare $n$ bancali su una nave avente $m$ stive. Sono noti il peso $p_i$ del bancale $i$ e la capacità $u_j$ della stiva $j$. Per motivi di stabilità del carico della nave, la stiva 1 e la stiva $m$ devono essere necessariamente utilizzate. Inoltre, la differenza in valore assoluto tra il peso totale degli oggetti caricati in tali due stive non deve eccedere una soglia di tolleranza prefissata $\varepsilon$.

Sapendo che l'utilizzo della stiva $j$ comporta il pagamento di un costo di manutenzione $f_j$, e che il caricamento del bancale $i$ nella stiva $j$ richiede un costo di caricamento $c_{ij}$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come caricare i bancali nelle stive della nave, in modo da rispettare il vincolo di stabilità del carico ed i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale derivante dalla manutenzione delle stive e dalle operazioni di caricamento.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il bancale } i \text{ viene caricato nella stiva } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se la stiva } j \text{ viene utilizzata} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 2, \ldots, m-1.$$

Utilizzando tali variabili logiche, il problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j=2}^{m-1} f_j y_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \le u_j y_j & j = 2, \ldots, m-1 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \le u_j & j = 1, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge 1 & j = 1, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_{i1} - \sum_{i=1}^{n} p_i x_{im} \le \varepsilon & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_{im} - \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i1} \le \varepsilon & \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n,\ j = 2, \ldots, m-1
\end{array}$$

Il primo blocco di vincoli garantisce che ogni bancale sia caricato in una stiva. Il secondo blocco garantisce che ogni stiva $j$ (con $j \neq 1, m$) sia caricata nel rispetto della propria capacità $u_j$: se utilizzata, il primo membro è positivo e quindi la variabile $y_j$ deve necessariamente assumere valore 1. I successivi due gruppi di vincoli garantiscono che le stive 1 e $m$ siano necessariamente utilizzate nel rispetto della propria capacità. Gli ultimi due gruppi di vincoli impongono che la differenza in valore assoluto tra il peso totale degli oggetti caricati nella stiva 1 ed il peso totale degli oggetti caricati nella stiva $m$ sia minore od uguale a $\varepsilon$. Il costo totale è dato dalla somma dei costi di manutenzione delle stive utilizzate e dei costi di caricamento.

**11)** L'agenzia di smaltimento rifiuti *PulitiSubito* deve aprire $k$ discariche in una importante regione italiana. A tal fine individua un insieme $J$ di siti candidati all'apertura di una discarica, con $|J| \geq k$. L'agenzia censisce inoltre l'insieme $I$ dei principali centri abitati della regione, e stima le distanze $d_{ij}$ intercorrenti tra il centro abitato $i \in I$ e il sito candidato $j \in J$.

Considerando come discarica *critica* per il centro abitato $i \in I$ la discarica più vicina a $i$ tra quelle aperte, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere dove aprire le $k$ discariche in modo da massimizzare la somma delle distanze intercorrenti tra ogni centro abitato e la relativa discarica critica.

**SVOLGIMENTO**

Introducendo le variabili binarie

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'agenzia di smaltimento rifiuti decide di aprire una discarica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J,$$

e le variabili ausiliarie $z_i$ per stimare la distanza intercorrente tra $i \in I$ e la relativa discarica critica, il problema dell'agenzia *PulitiSubito* può essere formulato mediante il seguente modello di P.L.I.:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i \in I} z_i & \\ & \sum_{j \in J} x_j = k & \\ & x_j d_{ij} + M(1 - x_j) \geq z_i & i \in I,\ j \in J \\ & x_j \in \{0, 1\} & j \in J. \end{array}$$

Il primo vincolo impone che vengano aperte $k$ discariche. Il secondo blocco di vincoli, in cui $M$ è una costante opportuna, garantisce che $z_i$ sia una stima per difetto della distanza intercorrente tra $i$ e la relativa discarica critica (la più vicina a $i$). Infatti, se $x_j = 1$, ovvero in $j$ è stata aperta una discarica, il vincolo relativo al centro abitato $i$ garantisce che sia $z_i \leq d_{ij}$. Se invece $x_j = 0$, il vincolo risulta sempre soddisfatto se $M$ viene scelta adeguatamente. Ad esempio, $M$ può essere scelta uguale alla massima distanza tra i centri abitati e i siti candidati, ovvero $M = \max_{i \in I, j \in J} d_{ij}$. Alternativamente, è possibile scegliere una costante distinta $M_i = \max_{j \in J} d_{ij}$ per ogni centro abitato $i$.

Poiché la funzione obiettivo, da massimizzare, è espressa come la somma delle $z_i$, a livello di soluzione ottima $z_i$ risulterà uguale alla distanza intercorrente tra $i$ e la discarica più vicina a $i$, e la distanza totale tra i centri abitati e le relative discariche critiche verrà pertanto massimizzata.

**12)** Dopo la caduta del governo, il Grande Leader del Partito Azzurro sta attentamente pianificando la rivincita elettorale per la Grande Coalizione, che comprende anche gli alleati del Partito Nero. Il territorio nazionale è diviso in $n$ collegi uninominali, in cui vince un seggio il candidato che ottiene il maggior numero di voti. Il Partito ha una lista di $n$ personalità disposte a candidarsi, ed i sondaggisti del Grande Leader gli assicurano che la Coalizione vincerà in tutti i collegi uninominali, indipendentemente dal candidato prescelto. Il numero di voti che un candidato prende è anche rilevante ai fini della quota proporzionale: per ciascun collegio $i$ e personalità $j$ si conosce il numero di voti $v_{ij}$ che il candidato prenderebbe se si presentasse in quel collegio, ed il partito riceverà un ulteriore seggio ogni $\delta$ voti ottenuti dai propri candidati eletti. Infine, esiste un premio di maggioranza su base regionale: gli $n$ collegi sono raggruppati in 21 regioni $R_h$, $h = 1, \dots, 21$, ed il partito che conquista la maggioranza dei collegi nella regione $h$ ha diritto ad altri $r_h$ deputati.

Il Grande Leader deve decidere la spartizione dei collegi. Gli accordi col Partito Nero stabiliscono che non più del 60% dei candidati della Coalizione potrà appartenere al Partito Azzurro, e che il Partito Azzurro non dovrà vincere il premio di maggioranza in più di 13 regioni su 21. Per evitare qualsiasi problema di ribaltone, il Grande Leader vuole determinare in quali collegi presentare un candidato del suo partito, ed eventualmente quale, in modo che il numero totale di deputati ottenuti sia massimo; se il numero totale di voti ottenuti non è multiplo di $\delta$ nella massimizzazione si valuta anche la parte frazionaria. Si formuli come *PLI* il problema corrispondente.

**SVOLGIMENTO**

Introducendo le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i \text{ si presenta nel collegio } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n,$$

$$m_h = \begin{cases} 1 & \text{se il Partito Azzurro ottiene il premio di maggioranza nella regione } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad h = 1, \dots, 21,$$

il problema può essere formulato come:

$$\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_{ij}\Big)/\delta + \sum_{h=1}^{21} r_h m_h & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 & i = 1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 & j = 1, \dots, n \\
& \sum_{j \in R_h}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq [(|R_h| + 1)/2] m_h & h = 1, \dots, 21 \\
& \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 0.6n & \\
& \sum_{h=1}^{21} m_h \leq 13 & \\
& x_{ij} \in \{0, 1\},\ r_h \in \{0, 1\} & i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n,\ h = 1, \dots, 21
\end{array}$$

La funzione obiettivo massimizza il numero totale di deputati, dato dalla somma di quelli provenienti dai collegi uninominali (primo termine), quelli provenienti dalla quota proporzionale (secondo termine) e quelli provenienti dal premio di maggioranza (terzo termine); il secondo termine può essere frazionario. I primi due blocchi di vincoli garantiscono che nessuna personalità si presenti in più di un collegio, e che in ciascun collegio ci sia al più un candidato del Partito Azzurro. Il terzo blocco di vincoli, insieme al fatto che il coefficiente di $m_h$ nella funzione obiettivo è positivo, assicura che la variabile $m_h$ ha valore 1 se e solo se il Partito Azzurro ha presentato il proprio candidato in più della metà dei seggi della regione $h$, e ha quindi ottenuto il premio di maggioranza. Gli ultimi due vincoli garantiscono, rispettivamente, che il numero di candidati del Partito Azzurro sia ai più il 60% del totale, e che il Partito Azzurro ottenga il premio di maggioranza in non più di 13 regioni.

**13)** Si considerino due insiemi di soluzioni ammissibili. Il primo insieme è così definito:

$$T_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 200, x_1 \leq 50\}.$$

Il secondo insieme è invece definito come segue:

$$T_2 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 \leq 500\}.$$

Si caratterizzi, utilizzando vincoli di tipo P.L.I., l'unione dei due insiemi di soluzioni ammissibili, giustificando la risposta.

**SVOLGIMENTO**

Le due regioni ammissibili, $T_1$ e $T_2$, sono definite da vincoli di tipo lineare. La regione ammissibile $T_1 \cup T_2$ può pertanto essere descritta ricorrendo a vincoli di tipo disgiuntivo.

A tal fine, si introducano due variabili logiche, $y_1$ e $y_2$, aventi il seguente significato: $y_1 = 0$ segnala che la soluzione appartiene a $T_1$ (primo insieme di soluzioni ammissibili), mentre $y_2 = 0$ segnala che la soluzione appartiene a $T_2$ (secondo insieme di soluzioni ammissibili). Utilizzando tali variabili logiche, la regione ammissibile definita come l'unione di $T_1$ e $T_2$ può essere formulata nel modo seguente:

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & M_1 y_1 \leq 200 \\
x_1 & & & - & M_1 y_1 \leq 50 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & M_2 y_2 \leq 500 \\
y_1 & + & y_2 & \leq 1 & \\
y_1 & , & y_2 & \in \{0,1\} &
\end{array}$$

Nella formulazione, $M_1$ e $M_2$ denotano costanti sufficientemente elevate: $M_1$ rende ridondanti i vincoli relativi a $T_1$ quando $y_1 = 1$, mentre $M_2$ rende ridondanti i vincoli caratterizzanti $T_2$ quando $y_2 = 1$.

**14)** La ENRI (ENergie RInnovabili) deve pianificare l'utilizzo delle sue centrali elettriche per la giornata di domani. ENRI conosce la domanda di energia elettrica $d_t$ (KWh) di tutti i suoi clienti per ciascuna ora $t = 1, \ldots, 24$. Conosce inoltre la quantità $p_t$ (KWh) di energia elettrica che le sue centrali fotovoltaiche ed eoliche produrranno; a ragione della elevata variabilità di queste ultime, è possibile che la produzione da fonti rinnovabili non sia sufficiente a coprire la domanda. Per questo ENRI può utilizzare come scorta $n$ centrali tradizionali a combustibili fossili. Ciascuna centrale $h$ può essere accesa una volta sola nella giornata, ad un prefissato orario $t_h$. Per la prima ora di funzionamento segue un programma di accensione prestabilito in cui produce esattamente $a_h$ KWh. Dalla seconda ora la centrale entra nello stato stazionario, in cui può variare a piacere, in ogni ora, l'energia prodotta tra un minimo $l_h$ ed un massimo $u_h$ (KWh). Lo stato stazionario dura esattamente $s_h$ ore; all'ora $t_h + s_h + 1$ la centrale deve eseguire un programma di spengimento prestabilito, simmetrico a quello di accensione, in cui produce $a_h$ KWh, e dall'ora successiva la centrale è spenta. Il costo di produrre un KWh (in qualsiasi fase di funzionamento) con la centrale è pari a $f_h$. Se la produzione complessiva di energia, rinnovabile e non, di ENRI non è sufficiente a coprire la domanda all'ora $t$, la porzione rimanente deve essere acquistata sul mercato ad un prezzo unitario $c_t$; se, viceversa, la produzione di energia è superiore alla domanda, il surplus viene venduto sul mercato allo stesso prezzo. Si formuli come *PLI* il problema di decidere quali centrali accendere, ed a che potenza farle operare durante lo stato stazionario, in modo da massimizzare il profitto per ENRI, dato dalla differenza tra il guadagno dovuto alla vendita del surplus sul mercato ed il costo dovuto sia all'approvvigionamento dell'energia mancante sul mercato sia al costo di produzione di energia.

**SVOLGIMENTO**

Per ciascuna centrale introduciamo una variabile binaria

$$x_h = \begin{cases} 1 & \text{se la centrale } h \text{ viene accesa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad h = 1, \ldots, n$$

Inoltre, per ciascuna ora in cui la centrale $h$, se accesa, è in stato stazionario, ovvero $t_h < t \leq t_h + s_h$, introduciamo variabili continue $p_h^t$ che indicano l'energia prodotta dalla centrale $h$ nell'ora $t$. Infine, per ciascuna ora $t$ definiamo:

- una variabile continua $v_t$ che rappresenta la differenza tra l'energia richiesta e quella complessivamente prodotta all'ora $t$;
- l'insieme $A(t) = \{\ h\ :\ t = t_h \text{ oppure } t = t_h + s_h + 1\ \} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ delle centrali che, se accese, sono in fase di accensione *oppure* di spengimento all'ora $t$;
- l'insieme $S(t) = \{\ h\ :\ t_h < t \leq t_h + s_h\ \} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ delle centrali che, se accese, sono in stato stazionario all'ora $t$.

Una formulazione del problema è:

$$\min \quad \sum_{t=1}^{24} c_t v_t + \sum_{h=1}^{n} f_h \left( \sum_{t=t_h+1}^{t_h+s_h} p_h^t + 2a_h x_h \right)$$

$$v_t = d_t - p_t - \sum_{h \in A(t)} a_h x_h - \sum_{h \in S(t)} p_h^t \qquad t = 1, \ldots, 24$$

$$l_h x_h \leq p_h^t \leq u_h x_h \qquad h = 1, \ldots, n, \quad t = t_h + 1, \ldots, t_h + s_h$$

$$x_h \in \{0, 1\} \qquad h = 1, \ldots, n$$

Il primo blocco di vincoli impone che $v_t$ sia la differenza tra l'energia richiesta e quella complessivamente prodotta all'ora $t$. Il secondo blocco di vincoli garantisce che per ciascuna centrale la produzione di energia nello stato stazionario sia compresa tra il massimo ed il minimo in ogni ora. Infine, la funzione obiettivo rappresenta il costo totale: si noti che, poiché $v_t$ è negativa quando la produzione supera il consumo, alcuni termini della prima sommatoria possono in effetti rappresentare profitti; nella seconda sommatoria, il termine $2a_h x_h$ tiene in conto dell'energia prodotta durante le fasi di accensione e spengimento.

**15)** Il porto di Livorno deve gestire il problema dello scarico delle merci dalle navi in arrivo. Si supponga che sia in arrivo una nave avente $m$ stive, le quali possono essere svuotate in parallelo mediante camion (in numero da stabilire, ma non superiore a $P$ camion per stiva) da assegnare alle singole stive. Il gestore del porto viene informato che, se la stiva $i$ viene svuotata utilizzando $p$ camion, sono necessarie $t_{pi}$ unità di tempo per svuotare la stiva e deve essere pagato un costo di noleggio $c_p$. Per motivi di equità, si vuole che ogni stiva sia svuotata entro $T$ unità di tempo. Inoltre, per motivi economici si vuole che il costo complessivo di noleggio dei camion non superi la soglia $C$. Si formuli il problema di assegnare i camion alle stive in modo da soddisfare il vincolo temporale ed il vincolo di costo richiesti, minimizzando il numero complessivo di camion utilizzati.

**SVOLGIMENTO**

Variabili decisionali:

$$x_{pi} = \begin{cases} 1 & \text{se la stiva } i \text{ è servita da } p \text{ camion,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Modello di PLI:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{P} p\, x_{pi} & \\ & \sum_{p=1}^{P} x_{pi} = 1 & \forall\ i = 1, \dots, m \\ & \sum_{p=1}^{P} t_{pi}\, x_{pi} \leq T & \forall\ i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{P} c_p x_{pi} \leq C & \\ & x_{pi} \in \{0, 1\} & \forall\ i = 1, \dots, m,\ p = 1, \dots, P \end{aligned}$$

**16)** Il nuovo network *Radio Maya the Bee* vuole che le proprie trasmissioni radiofoniche raggiungano le $m$ città presenti in una data regione. Per far ciò vuole affittare le 3 fasce orarie di trasmissione (6-14, 14-22, 22-6) dalle $n$ stazioni di ripetitori radio già presenti sul territorio, in modo da garantire che tutte le città ricevano sempre le trasmissioni nelle 24 ore. Per ogni città $i$ si conosce l'insieme $S(i)$ delle stazioni che possono garantire il segnale per la città in qualunque fascia oraria. Per affittare dalla stazione $j$ la fascia oraria $k$, il network deve pagare un costo $c_{jk}$. Sapendo che, secondo le vigenti leggi regionali sulla concorrenza, ogni stazione può affittare al network al più 2 fasce orarie al giorno, si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire da quali stazioni il network deve affittare le varie fasce orarie minimizzando la spesa sostenuta e garantendo il segnale per tutte le città nelle 24 ore.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le variabili intere

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se il network affitta la fascia oraria } k \text{ dalla stazione } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni $j = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, 3$.
Il costo complessivo di affitto delle fasce orarie dalle varie stazioni è:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} c_{jk} x_{jk}$$

I vincoli che garantiscono la copertura delle città sulle 24 ore sono:

$$\sum_{j \in S(i)} x_{jk} \geq 1, \qquad i = 1, \dots, m, \;\; k = 1, 2, 3.$$

I vincoli sul numero di fasce orarie affittabili dalla singola stazione sono:

$$\sum_{k=1}^{3} x_{jk} \leq 2, \qquad j = 1, ..., n.$$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} c_{jk} x_{jk} \\ & \sum_{j \in S(i)} x_{jk} \geq 1, \qquad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, 2, 3 \\ & \sum_{k=1}^{3} x_{jk} \leq 2, \qquad j = 1, ..., n \\ & x_{jk} \in \{0, 1\} \qquad j = 1, ...n, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

**17)** La direzione marketing della finanziaria *PonziGonzi* decide di aprire $p$ filiali per servire $n$ clienti. Il volume di lavoro portato dal cliente $i$ richiede mensilmente $d_i$ ore di lavoro, mentre la filiale $j$ ha una capacità lavorativa di $u_j$ ore mensili. Il Consiglio di Amministrazione della *PonziGonzi* ritiene che una filiale sia profittevole se il numero di ore lavorate mensilmente a servizio dei suoi clienti sia almeno il 70% della capacità lavorativa della filiale stessa. Si aiuti la direzione marketing a stabilire un piano di servizio, formulando in termini di P.L.I. il problema di assegnare ciascun cliente ad una ed una sola filiale in modo da massimizzare il numero delle filiali profittevoli.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le seguenti $np$ variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato alla filiale } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p.$$

I vincoli di semi-assegnamento, che garantiscono che ogni cliente sia assegnato ad una ed una sola filiale, sono:

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Introduciamo inoltre $p$ variabili logiche per contare le filiali profittevoli:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se la filiale } j \text{ lavora per i suoi clienti almeno il 70\% di } u_j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, p.$$

Devono essere rispettati i seguenti vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq u_j, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

mentre i seguenti vincoli permettono di individuarle le filiali profittevoli:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \geq 0.7\ u_j y_j, \qquad j = 1, \ldots, p.$$

La funzione obiettivo, da massimizzare, è data dal numero di filiali profittevoli: $\sum_{j=1}^{p} y_j$.

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{array}{rrcll}
\max & \sum_{j=1}^{p} y_j & & & \\
& \sum_{j=1}^{p} x_{ij} & = & 1 & i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} & \leq & u_j & j = 1, \ldots, p \\
& \sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} & \geq & 0.7\ u_j y_j & j = 1, \ldots, p \\
& x_{ij} & \in & \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, p \\
& y_j & \in & \{0, 1\} & j = 1, \ldots, p
\end{array}$$

**18)** Gli $n$ conferenzieri di un convegno scientifico alle Hawaii devono essere portati in tour presso un'isola dell'arcipelago. Per il trasbordo sono disponibili $m$ barche. Sia $u_j$ il massimo numero di passeggeri imbarcabili sulla barca $j$. Le imbarcazioni a disposizione differiscono non solo in termini di capacità, ma anche come servizi offerti a bordo. Ogni conferenziere segnala quindi su quali barche gradirebbe essere imbarcato. Noto il peso $p_i$ di ciascun conferenziere $i$, per garantire un'equa distribuzione del carico, l'organizzatore del tour decide di ripartire i conferenzieri tra le barche in modo da minimizzare il massimo carico di tutte le barche, considerando come carico di una barca esclusivamente il peso dei passeggeri imbarcati. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di ripartire i conferenzieri tra le barche, rispettando le preferenze dei conferenzieri e soddisfacendo i vincoli di capacità, in modo da minimizzare il massimo carico di tutte le barche *(suggerimento: utilizzare una matrice di dati per rappresentare le preferenze dei conferenzieri)*.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il conferenziere } i \text{ viene imbarcato sulla barca } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ e la seguente matrice di dati per esprimere le preferenze dei conferenzieri

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il conferenziere } i \text{ gradisce la barca } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m.$$

Per garantire che ogni conferenziere sia imbarcato rispettando le preferenze espresse, introduciamo i seguenti vincoli di semiassegnamento:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per garantire che il numero di passeggeri imbarcati su ogni barca non ecceda il limite associato all'imbarcazione stessa, introduciamo i seguenti vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq u_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Volendo minimizzare il carico della barca più carica, definiamo una variabile di soglia $z$ ed introduciamo i vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij} \leq z, \quad j = 1, \dots, m,$$

cosicché $z$ individua un'approssimazione superiore del massimo carico delle barche.
La formulazione del problema è quindi:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z \\
& \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = 1 && i = 1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq u_j && j = 1, \dots, m \\
& \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij} \leq z && j = 1, \dots, m \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

**19)** La nuova rete stradale del *Regno di Trinacria* che collega le $n$ città dell'isola è stata appena inaugurata. La rete stradale è costituita da $m$ tratte ed il pedaggio della tratta $(i, j)$, che collega le città $i$ e $j$ con un tempo di percorrenza $t_{ij}$, è stato fissato a $s_{ij}$ pierreali. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di spostarsi dalla raggiante città di *Katane* alla splendente città di *Zyz* sulla rete stradale in modo da minimizzare il tempo totale di percorrenza ma spendendo al più $K$ pierreali.

**SVOLGIMENTO**

Si consideri il grafo $G = (N, A)$ i cui $n$ nodi rappresentano le città e gli $m$ archi le tratte stradali. Katane sia situata nel nodo $k \in N$ e Zyz nel nodo $z \in N$. I possibili percorsi dalla prima alla seconda sono individuati dai cammini da $k$ a $z$ sul grafo $G$. Per descrivere un generico cammino si introducano le seguenti variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se si utilizza l'arco } (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ciascun arco $(i, j) \in A$. Utilizzando queste variabili, un cammino da $k$ a $z$ è individuato dall'invio di un'unità di flusso dal nodo $k$ al nodo $z$, ed può pertanto essere caratterizzato tramite i vincoli di conservazione del flusso:

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad \text{con } b_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i = k \\ 1 & \text{se } i = z \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N.$$

Il costo complessivo delle tratte attraversate dal cammino risulta essere

$$\sum_{(i,j)\in A} s_{ij} x_{ij}.$$

Analogamente, il tempo totale di percorrenza richiesto dal cammino risulta essere

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}.$$

Pertanto, il problema in esame può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} & \\
& \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = b_i & i \in N \\
& \sum_{(i,j)\in A} s_{ij} x_{ij} \leq K & \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & (i, j) \in A.
\end{array}$$

**20)** La rete di intelligence *BuBuSettete* è costituita da $n$ informatori e $m$ agenti. Per garantire la sicurezza delle comunicazioni ciascun informatore $i$ potrà interagire con un solo agente scelto nell'insieme $P(i) \subseteq \{1, \ldots, m\}$ degli agenti di sua fiducia. I dati forniti settimanalmente dall'informatore $i$ richiedono un tempo di elaborazione $t_i$ e ciascun agente può può processarli soltanto in maniera sequenziale. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare gli informatori agli agenti, rispettando le preferenze degli informatori, in modo da minimizzare il tempo totale di elaborazione dell'agente con il maggior carico.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'informatore } i \text{ è assegnato all'agente } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j \in P(i).$$

Ogni informatore $i$ deve essere assegnato ad uno ed un solo agente nell'insieme $P(i)$; tale richiesta può essere espressa mediante i seguenti vincoli di semiassegnamento:

$$\sum_{j \in P(i)} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Il tempo di elaborazione richiesto all'agente $j$ è dato dalla quantità:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Per formulare la funzione obiettivo, da minimizzare, dobbiamo esprimere il massimo tra questi tempi di elaborazione. A tal fine introduciamo una variabile ausiliaria $T$ che ne rappresenta un'approssimazione per eccesso, e utilizziamo i seguenti vincoli di soglia:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij} \leq T, \quad j = 1, \ldots, m.$$

La formulazione del problema è quindi:

$$\begin{array}{ll} \min & T \\ & \displaystyle\sum_{j \in P(i)} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_{ij} \leq T \qquad j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j \in P(i) \end{array}$$

Quando il problema è risolto all'ottimo, la variabile ausiliaria $T$ fornisce il tempo di elaborazione richiesto all'agente con il maggior carico, che sarà pertanto minimizzato.

**21)** Judy, la nuova segretaria dell'importante compagnia *FromNineToFive*, deve sbrigare $m$ pratiche. Conoscendo il tempo $t_i$ necessario a sbrigare la pratica $i$, decide di sbrigarne alcune al mattino e di rimandare le altre al pomeriggio. Per equilibrare il proprio carico di lavoro, Judy decide di ripartire le pratiche in modo da minimizzare il massimo tra il tempo dedicato alle pratiche al mattino e quello loro dedicato al pomeriggio. Aiuta Judy a decidere quali pratiche svolgere al mattino e quali al pomeriggio, formulando il problema in termini di P.L.I.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere le decisioni da prendere introduciamo le seguenti $m$ variabili logiche:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se la pratica } i \text{ è eseguita al mattino,} \\ 0, & \text{altrimenti (è eseguita al pomeriggio),} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, m.$$

Per individuare la funzione obiettivo si introduce una variabile ausiliaria $T$, il cui valore andrà minimizzato. I seguenti vincoli (di soglia) impongono che $T$ rappresenti un'approssimazione per eccesso del tempo di lavoro mattutino e pomeridiano:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i x_i \leq T,$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_i (1 - x_i) \leq T.$$

Una volta scelti i valori delle variabili $x_i$, ovvero una volta stabilito quali pratiche eseguire al mattino e quali al pomeriggio, il minimo valore che $T$ può assumere è esattamente il massimo tra il tempo tempo di lavoro mattutino e quello pomeridiano.

La formulazione del problema è pertanto la seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & T \\ & \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \leq T \\ & \sum_{i=1}^{m} t_i (1 - x_i) \leq T \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

**22)** Ritiratosi a meditare nelle profondità di una caverna, *Aristocle* ha portato con sé i 10 tomi in cui sono raccolte le sue opere. Spaventato da ombre e da un'eco costante, decide di mettere al riparo i tomi dentro una cavità della parete, in cui però non possono entrare tutti. Aristocle stima in $U$ il volume della cavità e in $a_i$ il volume del tomo $i$, a cui attribuisce un valore $p_i$. Per agevolare la scelta decide inoltre che:

- al più uno tra i tomi 1, 2 e 3 può venir inserito nella cavità,
- almeno uno tra i tomi 3, 7 e 10 deve essere inserito nella cavità,
- il tomo 5 può essere inserito solo se viene inserito anche il tomo 9,
- se il tomo 9 viene inserito, allora deve essere inserito almeno uno tra i tomi 2 e 7.

Aiuta Aristocle a decidere quali tomi inserire nella cavità nel rispetto della sua capacità e delle condizioni sopra elencate in modo da massimizzare il valore complessivo dei tomi selezionati. A tal fine si formuli il problema in termini di P.L.I.

**SVOLGIMENTO**

Per formulare il problema introduciamo 10 variabili binarie $x_i$ con il seguente significato:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se il tomo } i \text{ viene inserito nella cavità} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Il problema può essere formulato come segue:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{10} p_i x_i \\ & \sum_{i=1}^{10} a_i x_i \leq U \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_3 + x_7 + x_{10} \geq 1 \\ & x_5 \leq x_9 \\ & x_2 + x_7 \geq x_9 \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, 10 \end{aligned}$$

Il primo vincolo garantisce che il volume complessivo dei tomi selezionati non ecceda la capacità della cavità. I vincoli successivi sono vincoli di tipo logico e garantiscono il soddisfacimento dei quattro requisiti addizionali. Infine la funzione obiettivo rappresenta il valore complessivo dei tomi selezionati.

**23)** L'importante gruppo commerciale *Pentathlon* ha deciso di aprire $m$ punti vendita per rifornire $n$ società di atletica leggera. Sia $u_j$ il massimo numero di società che il punto vendita $j$ è in grado di rifornire. Un'indagine di mercato ha permesso di stimare il coefficiente di soddisfacimento $s_{ij}$ della società $i$ nel caso in cui venisse rifornita dal punto vendita $j$. Se il soddisfacimento totale delle società rifornite dal punto vendita $j$ risulterà maggiore o uguale ad una prefissata soglia $S$, il punto vendita riceverà un premio $p_j$ dalla Federazione di Atletica Leggera. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare le $n$ società agli $m$ punti vendita massimizzando la somma dei premi ricevuti dai punti vendita nel rispetto dei vincoli di capacità.

**SVOLGIMENTO**

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la società } i \text{ è assegnata al punto vendita } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, e

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il punto vendita } j \text{ riceverà il premio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Ogni società deve essere assegnata ad esattamente un punto vendita:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots n.$$

I vincoli di capacità relativi ai punti vendita devono essere rispettati:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Il punto vendita $j$ riceverà il premio, e la corrispondente $y_j$ potrà assumere il valore 1, se e solo se il soddisfacimento totale delle società assegnate a $j$ risulterà maggiore o uguale a $S$:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq S y_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

La funzione obiettivo è data dalla somma dei premi ricevuti dai punti vendita:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j y_j.$$

La formulazione risultante è:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j y_j & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j & j = 1, \ldots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq S y_j & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

**24)** La multinazionale *Fishbus*, leader nel commercio di pesce surgelato, decide di aprire $m$ magazzini per rifornire gli $n$ mercati della Longobardia. La capacità di ogni magazzino può essere scelta tra $q_1$, $q_2$, $q_3$ e $q_4$ quintali di pesce a seconda delle esigenze dell'azienda. Il costo di apertura di ogni magazzino è proporzionale alla capacità scelta, dove $c$ individua il costo per quintale (se un magazzino viene aperto con capacità $q_i$ quintali, il relativo costo di apertura è $cq_i$). La domanda del mercato $i$ è stimata in $d_i$ quintali.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo le seguenti $nm$ variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il mercato } i \text{ è assegnato al magazzino } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

I vincoli di semiassegnamento garantiscono che ogni mercato sia assegnato ad uno ed un solo magazzino:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Le variabili binarie

$$y_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{se al magazzino } j \text{ è attribuita la capacità } q_k, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni $k = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, m$, individuano la capacità scelta per ciascun magazzino. Affinché un'unica capacità sia selezionata per ciascun magazzino $j$, le variabili devono soddisfare i vincoli:

$$\sum_{k=1}^{4} y_{kj} = 1, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

I vincoli di capacità relativi ai magazzini possono allora essere formulati come:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{4} q_k y_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{4} c\, q_k\, y_{kj} \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 && \forall\, i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{k=1}^{4} y_{kj} = 1 && \forall\, j = 1, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{4} q_k y_{kj} && \forall\, j = 1, \ldots, m \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \\
& y_{kj} \in \{0, 1\} && k = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$