5 - Programmazione Lineare

Mauro Passacantando

Dipartimento di Scienze Economico-Aziendali e Diritto per l'Economia
Università degli Studi di Milano-Bicocca
mauro.passacantando@unimib.it

Corso di Dinamica dei Sistemi Aziendali
Laurea Magistrale in Scienze Economico-Aziendali
Università degli Studi di Milano-Bicocca

Forma generale e forma canonica

Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare di n variabili reali soggette a vincoli lineari di uguaglianza o di disuguaglianza, cioè

$$\begin{cases} \max(\text{o } \min)\ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \\ (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Forma generale e forma canonica

Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare di n variabili reali soggette a vincoli lineari di uguaglianza o di disuguaglianza, cioè

$$\begin{cases} \max(\text{o } \min)\ c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \\ (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Definizione

Un problema nella forma

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

è chiamato problema di PL in forma canonica.

Forma generale e forma canonica

Teorema

Ogni problema di PL può essere riscritto in modo equivalente in forma canonica.

Dim. $\min\ c^T x = -\max\,(-c^T x)$

$a^T x \geq b$ è equivalente a $-a^T x \leq -b$

$a^T x = b$ è equivalente a $\begin{cases} a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b \end{cases}$

Esercizio

Scrivere in forma canonica il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min\ 2x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 9x_2 = 17 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(4, 0)$ e $(1, 3)$. Infatti:
$(2, 2) = \frac{1}{3}(4, 0) + \frac{2}{3}(1, 3)$.

Esempio. $(2, 2)$ è combinazione convessa di $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$. Infatti:
$(2, 2) = \frac{1}{4}(1, 1) + \frac{1}{4}(3, 1) + \frac{1}{2}(2, 3)$.

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x^i$.

Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(4,0)$ e $(1,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{3}(4,0) + \frac{2}{3}(1,3)$.
Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(3,1) + \frac{1}{2}(2,3)$.

Definizione

L'involucro convesso di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\mathrm{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di K.

Esercizio. Qual è l'involucro convesso dei punti $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$?

Combinazioni convesse

Definizione

Un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto combinazione convessa dei vettori $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$.

Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(4,0)$ e $(1,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{3}(4,0) + \frac{2}{3}(1,3)$.

Esempio. $(2,2)$ è combinazione convessa di $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$. Infatti:
$(2,2) = \frac{1}{4}(1,1) + \frac{1}{4}(3,1) + \frac{1}{2}(2,3)$.

Definizione

L'involucro convesso di un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$, denotato con $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di K.

Esercizio. Qual è l'involucro convesso dei punti $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,3)$?

Definizione

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto convesso se per ogni $x, y \in K$ il vettore $\alpha x + (1-\alpha) y \in K$ per ogni $\alpha \in [0,1]$.

Poliedri

L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x \leq b\}$ è un semispazio chiuso di $\mathbb{R}^n$.

Definizione

Un poliedro in $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi, oppure, è l'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni lineari $Ax \leq b$.
[La regione ammissibile di ogni problema di PL è un poliedro.]

Un poliedro P è detto limitato se esiste $M > 0$ tale che $\|x\| \leq M$ per ogni $x \in P$, ossia se è contenuto in una opportuna sfera centrata nell'origine.

Esempi.

$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}$ è un poliedro limitato.

$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$ è un poliedro illimitato.

D'ora in poi considereremo solo poliedri limitati.

Vertici

Definizione

Un punto x di un poliedro P è chiamato vertice se non esistono due punti $y, z \in P$ diversi da x tali che x è combinazione convessa di y e z.

Esempio.

I vertici di $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq x_1 \leq 4, \; 1 \leq x_2 \leq 3\}$ sono $(1,1)$, $(1,3)$, $(4,1)$ e $(4,3)$.

Teorema

Ogni poliedro non vuoto e limitato ha almeno un vertice.

Teorema di decomposizione dei poliedri (limitati)

Teorema

Se P è un poliedro non vuoto e limitato, allora $P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\}$, dove $v^1, \dots, v^m$ sono i vertici di P.

Teorema di decomposizione dei poliedri (limitati)

Teorema

Se P è un poliedro non vuoto e limitato, allora $P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\}$, dove $v^1, \dots, v^m$ sono i vertici di P.

Esercizio. Scrivere la decomposizione dei seguenti poliedri:

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x_1 \le 4, \quad 1 \le x_2 \le 3\},$$

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 1, \quad x_1 + x_2 \le 3\}.$$

Direzioni di crescita e di decrescita

Definizione

Consideriamo un problema di PL in forma canonica

$$\begin{cases} \max \; c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

Un vettore d è detto direzione di crescita per la funzione obiettivo di $(\mathcal{P})$ se $c^T d > 0$.

Un vettore d è detto direzione di decrescita per la funzione obiettivo di $(\mathcal{P})$ se $c^T d < 0$.

Direzioni di crescita e di decrescita

Definizione

Consideriamo un problema di PL in forma canonica

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

Un vettore d è detto direzione di crescita per la funzione obiettivo di $(\mathcal{P})$ se $c^T d > 0$.

Un vettore d è detto direzione di decrescita per la funzione obiettivo di $(\mathcal{P})$ se $c^T d < 0$.

Esempio. Dato il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

il vettore $d = (2,1)$ è una direzione di crescita perché $(2,-3)^T(2,1) = 1 > 0$, mentre $d = (1,1)$ è una direzione di decrescita perché $(2,-3)^T(1,1) = -1 < 0$.

Teorema fondamentale della PL

Consideriamo un problema di PL in forma canonica

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\} \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

dove P è un poliedro non vuoto e limitato.

Teorema fondamentale della PL

Il valore ottimo di $(\mathcal{P})$ è finito ed un vertice di P è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$.

Teorema fondamentale della PL

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Sappiamo che $P = \text{conv}\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. La soluzione ottima è il vertice $(2,1)$ ed il valore ottimo è 1.

Esempio. Consideriamo ora il problema

$$\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

I vertici $(1,2)$ e $(2,1)$ sono entrambi soluzioni ottime. Quindi anche tutti i punti sul segmento compreso tra $(1,2)$ e $(2,1)$ sono soluzioni ottime.

Quante soluzioni ottime ha un problema di PL?

Corollario. Se la regione ammissibile P è non vuota e limitata, allora il problema $(\mathcal{P})$ o ha un'unica soluzione ottima oppure ne ha infinite.

Infatti, se esistono due soluzioni ottime x e x' diverse, con $c^T x = c^T x' = v$, allora anche $\alpha x + (1-\alpha)x'$ è ottima per ogni $\alpha \in (0,1)$. Infatti, $\alpha x + (1-\alpha)x'$ è ammissibile e

$$c^T[\alpha x + (1-\alpha)x'] = \alpha c^T x + (1-\alpha)c^T x' = \alpha v + (1-\alpha)v = v$$

Problema duale

Consideriamo un problema di PL forma canonica

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \leq b\} \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

che d'ora in poi sarà chiamato problema primale.

Definizione

Il problema di PL definito come

$$\begin{cases} \min\ y^T b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m :\ y^T A = c^T, \quad y \geq 0\} \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

è chiamato problema duale di ($\mathcal{P}$).

	Primale	Duale
Obiettivo	max	min
Variabili	n	m
Vincoli	m	n

Problema duale

Esempio. Il problema duale di

$$\begin{cases} \max\ 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (\mathcal{P})$$

è il problema

$$\begin{cases} \min\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + y_3 = 4 \\ y_2 + y_3 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

Problema duale

Esempio. Un allevatore deve preparare la miscela del mangime per i suoi animali mescolando orzo e avena. È noto che un kg di orzo contiene 730 g di carboidrati, 120 g di proteine e 23 g di grassi, mentre un kg di avena contiene 662 g di carboidrati, 169 g di proteine e 69 g di grassi. Per ogni animale il mangime deve fornire un fabbisogno giornaliero di almeno 500 g di carboidrati, 100 g di proteine e 50 g di grassi. Sapendo che l'orzo costa 0.3 €/kg e l'avena 0.28 €/kg, l'allevatore vuole trovare la composizione del mangime che rispetti il fabbisogno dei vari principi nutritivi in modo da minimizzare il costo complessivo.

Variabili:
x_1 = numero di kg di orzo contenuti nel mangime giornaliero di ogni animale
x_2 = numero di kg di avena contenuti nel mangime giornaliero di ogni animale

Modello:

$$\begin{aligned} &\min\ 0.3x_1 + 0.28x_2 \\ &730x_1 + 662x_2 \geq 500 \\ &120x_1 + 169x_2 \geq 100 \\ &23x_1 + 69x_2 \geq 50 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema duale

Il problema duale si può scrivere nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
&\max \; 500y_1 + 100y_2 + 50y_3 \\
&730y_1 + 120y_2 + 23y_3 \leq 0.3 \\
&662y_1 + 169y_2 + 69y_3 \leq 0.28 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

e può essere interpretato come il "problema del venditore di pillole". Un venditore ha a disposizione 3 tipi di pillole: pillole di carboidrati, pillole di proteine e pillole di grassi (ogni pillola contiene 1 g del corrispondente principio nutritivo). Il venditore deve stabilire i prezzi di vendita delle pillole in modo che il ricavato della vendita sia massimo e che i prezzi siano competitivi, ossia che l'allevatore non ritenga svantaggioso acquistare le pillole invece di orzo e avena.

Le variabili y_1, y_2, y_3 sono i prezzi unitari delle pillole.
La funzione obiettivo $500y_1 + 100y_2 + 50y_3$ è il ricavato della vendita.
I vincoli impongono che la dieta a base di pillole non sia più costosa della dieta a base di orzo e avena.

Proprietà del problema duale

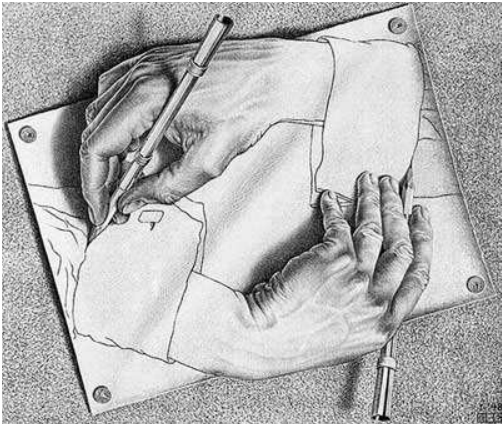
Perché è chiamato duale?

Proprietà del problema duale

Perché è chiamato duale?

Teorema

Il duale di $(\mathcal{D})$ è equivalente al problema $(\mathcal{P})$.



M.C. Escher, Drawing Hands, 1948.

Proprietà del problema duale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max \; c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\} \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

in cui il poliedro P è non vuoto e limitato.

Teorema di dualità forte

Il valore ottimo di $(\mathcal{D})$ coincide con il valore ottimo di $(\mathcal{P})$.

Proprietà del duale

Esempio. Qual è il valore ottimo del seguente problema con 4 variabili?

$$\begin{cases} \min\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Proprietà del duale

Esempio. Qual è il valore ottimo del seguente problema con 4 variabili?

$$\begin{cases} \min\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{*}$$

Questo problema è il duale di

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$$

che è facile da risolvere graficamente: la soluzione ottima è $(1, 0)$ ed il valore ottimo è 2.
Il teorema di dualità forte garantisce che anche il valore ottimo di (*) è 2.

Condizioni di ottimalità

Come si può riconoscere una soluzione ottima?

Condizioni di ottimalità

Come si può riconoscere una soluzione ottima?

Teorema (degli scarti complementari)

Supponiamo che $\bar{x}$ sia una soluzione ammissibile del primale $(\mathcal{P})$.
Allora $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c^T & \text{(ammissibilità} \\ \bar{y} \geq 0 & \text{duale)} \\ \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 & (\bar{x} \text{ e } \bar{y} \text{ sono in scarti complementari}) \end{cases}$$

Qualunque soluzione $\bar{y}$ di questo sistema è una soluzione ottima del duale $(\mathcal{D})$.

Notiamo che il sistema sopra è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c^T \\ \bar{y} \geq 0 \\ \bar{y}_i (b_i - A_i \bar{x}) = 0 \qquad \forall\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Scarti complementari

Esempio. Dire se $\bar{x} = (1,1)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y \geq 0 \\ y^T(0,0,1,1) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y_3 = y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 = 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Poiché $\bar{y} = (2/3, 5/3, 0, 0)$ è una soluzione del sistema, $\bar{x}$ è ottima.

Scarti complementari

Esempio. Dire se $\bar{x} = (0,0)$ è ottima per il problema

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y \geq 0 \\ y^T(3,3,0,0) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 0 \\ y_3 = -3 \\ y_4 = -4 \\ y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

che è impossibile, quindi $\bar{x}$ non è ottima.

Scarti complementari

Esercizio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max \ \alpha x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Per quali valori di α il vettore $\bar{x} = (1,1)$ è ottimo?

Esercizio. Trovare tutte le soluzioni ottime del problema

$$\begin{cases} \max \ 4x_1 + 7x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ -x_1 \leq -1 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq -3 \end{cases}$$

e del suo duale utilizzando il teorema degli scarti complementari.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se il poliedro P è non vuoto e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale.

Ma i vertici di un poliedro sono definiti in modo geometrico $\rightarrow$ abbiamo bisogno di proprietà algebriche dei vertici.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se il poliedro P è non vuoto e limitato, allora un vertice di P è ottimo per il primale.

Ma i vertici di un poliedro sono definiti in modo geometrico $\rightarrow$ abbiamo bisogno di proprietà algebriche dei vertici.

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

dove il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\}$ è non vuoto e limitato.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Definizione

Una base è un insieme B di n indici di riga tali che la sottomatrice quadrata A_B (formata dalle righe A_i con $i \in B$) sia invertibile, cioè $\det(A_B) \neq 0$. Indichiamo con N l'insieme degli indici non in base. Possiamo partizionare A e b come segue:

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$$

Data una base B, il vettore $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è chiamato soluzione di base primale.

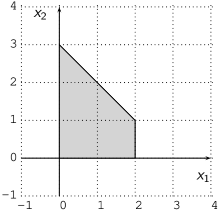
$\bar{x}$ è ammissibile se $A_N \bar{x} \leq b_N$ (tutti i vincoli non di base sono soddisfatti)
$\bar{x}$ non è ammissibile se esiste $i \in N$ tale che $A_i \bar{x} > b_i$ (almeno un vincolo non di base è violato)

$\bar{x}$ è degenere se esiste $i \in N$ tale che $A_i \bar{x} = b_i$ (almeno un vincolo non di base è attivo in $\bar{x}$)
$\bar{x}$ è non degenere se $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$ (nessun vincolo non di base è attivo in $\bar{x}$)

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

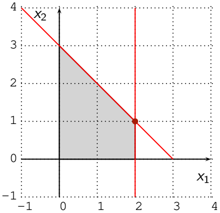
$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

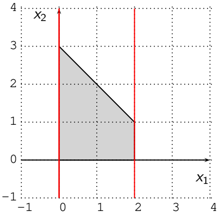
$\bar{x}$ è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

e non degenere perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{x}$ è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

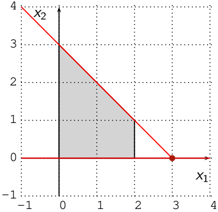
e non degenere perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

$B = \{1, 3\}$ non è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile: $\det(A_B) = 0$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$B = \{1, 2\}$ è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: $\det(A_B) = 1$.

La relativa soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{x}$ è ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$

e non degenere perché $A_i \bar{x} \neq b_i$ per ogni $i \in N$.

$B = \{1, 3\}$ non è una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile: $\det(A_B) = 0$.

$B = \{2, 4\}$ è una base e la relativa soluzione di base primale non è ammissibile:

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$ e non degenere.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\}$.
$\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Perché le soluzioni di base sono importanti?

Teorema

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\}$.
$\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ammissibile.

Come riconoscere un vertice ottimo?

Definizione

Data una base B, il vettore $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0$

è chiamato soluzione di base duale.

$\bar{y}$ è ammissibile se $\bar{y}_B \geq 0$
$\bar{y}$ non è ammissibile se esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i < 0$

$\bar{y}$ è degenere se esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i = 0$
$\bar{y}$ è non degenere se $\bar{y}_i \neq 0$ per ogni $i \in B$

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Teorema (condizione sufficiente di ottimalità)

Sia $\bar{x}$ una soluzione di base primale ammissibile relativa alla base B.
Se la soluzione di base duale $\bar{y}$ relativa alla stessa base B è ammissibile, allora $\bar{x}$ è ottima per il problema primale (e $\bar{y}$ è ottima per il duale).

Dim. Due soluzioni di base $\bar{x}$ e $\bar{y}$ relative alla stessa base sono sempre in scarti complementari:

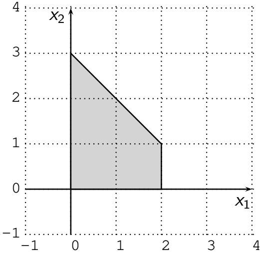
$$\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = (\bar{y}_B^T, \bar{y}_N^T)\begin{pmatrix} b_B - A_B\bar{x} \\ b_N - A_N\bar{x} \end{pmatrix} = (\bar{y}_B^T, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ b_N - A_N\bar{x} \end{pmatrix} = 0.$$

Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono anche ammissibili (rispettivamente per il primale e duale), allora sono anche ottime.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

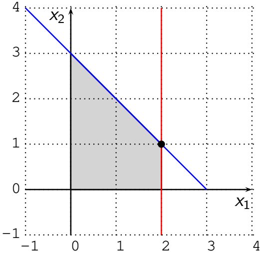
$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

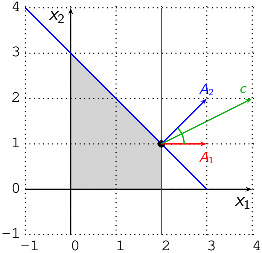


$\bar{x} = (2, 1)$ è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1, 2\}$.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = (2,1)$ è una soluzione di base primale relativa alla base $B = \{1,2\}$.
La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \qquad \text{dove} \qquad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1,1), \qquad \bar{y}_N = 0.$$

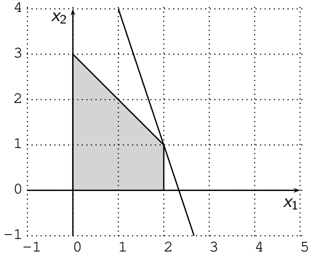
$\bar{y}$ è ammissibile perché $\bar{y}_B \geq 0$, quindi $\bar{x}$ è ottima.

Caratterizzazione algebrica dei vertici

In generale, la condizione di ottimalità basata sull'ammissibilità della soluzione di base duale è sufficiente ma non necessaria.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ 3x_1 + x_2 \le 7 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

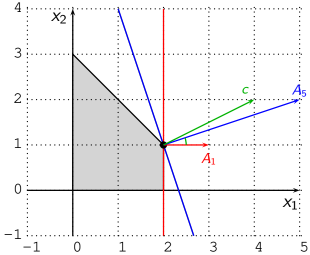


Caratterizzazione algebrica dei vertici

In generale, la condizione di ottimalità basata sull'ammissibilità della soluzione di base duale è sufficiente ma non necessaria.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = (2, 1)$ è ottima ed è una soluzione di base primale (degenere) relativa alla base $B = \{1, 5\}$.

La soluzione di base duale relativa a B è

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 1), \quad \bar{y}_N = 0.$$

$\bar{y}$ non è ammissibile perché $\bar{y}_1 < 0$, ma $\bar{x}$ è ottima.

Algoritmo del simplesso primale

Consideriamo un problema primale

$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

in cui il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\}$ è non vuoto e limitato, quindi esistono vertici (soluzioni di base ammissibili) di P.

L'algoritmo del simplesso primale parte da un vertice del poliedro primale.

Se il vertice del poliedro duale corrispondente alla stessa base è ammissibile per il duale, allora il vertice primale è ottimo e l'algoritmo si ferma.
Altrimenti l'algoritmo trova

- una direzione di crescita per il primale
- il passo di spostamento lungo tale direzione
- una nuova base, cambiando un solo indice rispetto alla vecchia base, in modo che la nuova soluzione di base primale rimanga ammissibile (il nuovo vertice primale è adiacente al vertice precedente).

E così via ...

Algoritmo del simplesso primale

1. Trova una base B tale che la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$ sia ammissibile
2. Calcola la soluzione di base duale $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$, dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$, $\bar{y}_N = 0$
3. **Se** $\bar{y}_B \geq 0$ **allora** STOP [$\bar{x}$ è ottima per il primale, $\bar{y}$ è ottima per il duale]
   altrimenti trova l'indice uscente da B:

   $$h = \min\{i \in B : \ \bar{y}_i < 0\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   poni $W = -A_B^{-1}$ e denota W^h la h–esima colonna di W
   (W^h è la direzione di spostamento)
4. Calcola il passo di spostamento:

   $$\vartheta := \min\left\{ \frac{b_i - A_i\,\bar{x}}{A_i\,W^h} \ : \ i \in N,\ A_i\,W^h > 0 \right\},$$

   e trova l'indice entrante

   $$k = \min\left\{ i \in N : \ A_i\,W^h > 0,\ \frac{b_i - A_i\,\bar{x}}{A_i\,W^h} = \vartheta \right\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

5. Aggiorna la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcola $\bar{x} = A_B^{-1}\, b_B$ e torna al passo 2

Algoritmo del simplesso primale

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Trova base B tale che $\bar{x} = A_B^{-1} \, b_B$ sia ammissibile

Calcola soluzione base duale: $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0$

$\bar{y}_B \geq 0$?

si

$\bar{x}$ ottima di $(\mathcal{P})$

$\bar{y}$ ottima di $(\mathcal{D})$

no

Trova l'indice **uscente**: $h = \min\{i \in B : \ \bar{y}_i < 0\}$,

Poni $W = -A_B^{-1}$ (W^h è la h–esima colonna di W)

Trova $\vartheta = \min \left\{ \dfrac{b_i - A_i \, \bar{x}}{A_i \, W^h} \ : \ i \in N, \ A_i \, W^h > 0 \right\}$

Trova l'indice **entrante**:

$k = \min \left\{ i \in N : \ A_i \, W^h > 0, \ \dfrac{b_i - A_i \, \bar{x}}{A_i \, W^h} = \vartheta \right\}$

Aggiorna la base: $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$

Calcola $\bar{x} = A_B^{-1} \, b_B$

Algoritmo del simplesso primale

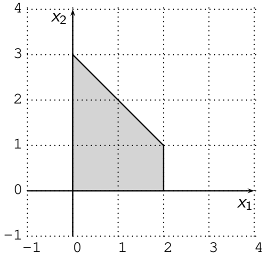
Teorema

L'algoritmo del simplesso primale trova un vertice ottimo dopo un numero finito di iterazioni.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

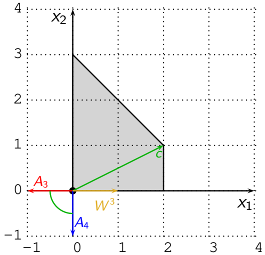


partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



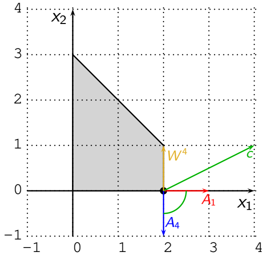
partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$,
$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema



$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$,

$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

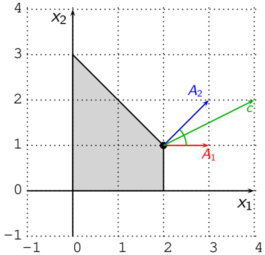
Iterazione 2. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_2 W^4 = 1$, $A_3 W^4 = 0$, $k = 2$.

Algoritmo del simplesso primale

Esempio. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$, $h = 3$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1 W^3 = 1$, $A_2 W^3 = 1$,

$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $k = 1$.

Iterazione 2. $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1)$, $h = 4$, $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_2 W^4 = 1$, $A_3 W^4 = 0$, $k = 2$.

Iterazione 3. $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (1, 1) \geq 0$ stop, $\bar{x}$ è ottimo.

Algoritmo del simplesso primale - vertice iniziale

Come si trova una soluzione di base ammissibile per $(\mathcal{P})$?

Supponiamo che B sia una base e che $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ non sia ammissibile. Definiamo gli insiemi

$$U = \{i \in N : \; A_i \, \bar{x} \leq b_i\}, \qquad V = \{i \in N : \; A_i \, \bar{x} > b_i\},$$

e costruiamo il problema ausiliario primale:

$$\begin{cases} \max\limits_{(x,\varepsilon)} \; -\sum\limits_{i \in V} \varepsilon_i \\ A_i \, x \leq b_i & \text{per } i \in B \cup U \\ A_i \, x - \varepsilon_i \leq b_i & \text{per } i \in V \\ -\varepsilon_i \leq 0 & \text{per } i \in V \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{aux})$$

Il vettore $(\bar{x}, \bar{\varepsilon})$, con

$$\bar{\varepsilon} = A_V \bar{x} - b_V \geq 0,$$

è una soluzione di base ammissibile per $(\mathcal{P}_{aux})$ relativa alla base $B \cup V$, con matrice di base uguale a

$$\left(\begin{array}{c|c} A_B & 0 \\ \hline A_V & -I \end{array} \right).$$

Algoritmo del simplesso primale - vertice iniziale

A partire da tale soluzione di base ammissibile per $(\mathcal{P}_{aux})$, applichiamo l'algoritmo del simplesso primale per risolvere il problema ausiliario.

A partire da una soluzione di base ottima di $(\mathcal{P}_{aux})$ si può costruire una soluzione di base ammissibile per $(\mathcal{P})$.

Analisi di sensibilità

Come varia la soluzione ottima (ed il valore ottimo) di un problema di PL primale se perturbiamo il vettore c della funzione obiettivo oppure il vettore b della regione ammissibile?

Consideriamo una coppia primale/duale di problemi:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ A x \leq b \end{cases} \qquad\qquad (\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \min \ y^{\mathsf{T}} b \\ y^{\mathsf{T}} A = c^{\mathsf{T}} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Supponiamo che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano due soluzioni di base complementari, relative alla stessa base B, e ottime rispettivamente per i problemi $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$.

Perturbazione del vettore c

Perturbiamo il vettore c aggiungendo un termine δ.
I problemi primale e duale perturbati diventano:

$$(\mathcal{P}_\delta) \quad \begin{cases} \max\ (c+\delta)^{\mathsf{T}} x \\ A x \leq b \end{cases} \qquad\qquad (\mathcal{D}_\delta) \quad \begin{cases} \min\ y^{\mathsf{T}} b \\ y^{\mathsf{T}} A = (c+\delta)^{\mathsf{T}} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Indichiamo con $v(\mathcal{P}_\delta)$ il valore ottimo del primale perturbato.

Teorema 1
Vale la seguente disuguaglianza: $v(\mathcal{P}_\delta) \geq v(\mathcal{P}) + \delta^{\mathsf{T}} \bar{x}$.

Teorema 2
Se $\bar{y}_B^{\mathsf{T}} + \delta^{\mathsf{T}} A_B^{-1} \geq 0$, allora $\bar{x}$ è ottima anche per il primale perturbato $(\mathcal{P}_\delta)$.

Perturbazione del vettore c

Esempio. Per il problema primale

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

sappiamo che la soluzione ottima è $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ relativa alla base $B = \{1, 2\}$, mentre $\bar{y}^\mathsf{T} = (1, 1, 0, 0)$ è la soluzione ottima duale.
Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max\ (2+\delta_1)x_1 + (1+\delta_2)x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\delta)$$

Poiché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dal Teorema 2 si ha che $\bar{x}$ è ottima anche per il problema perturbato se $(1,1) + (\delta_1, \delta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$, cioè $\begin{cases} 1 + \delta_1 - \delta_2 \geq 0 \\ 1 + \delta_2 \geq 0 \end{cases}$

Perturbazione del vettore b (componenti non di base)

Supponiamo ora di perturbare solo le componenti del vettore b che non appartengono alla base B (ottima del primale), cioè sommiamo al vettore b un vettore ε tale che

$$\varepsilon_i = 0 \qquad \forall\ i \in B.$$

I problemi $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$ perturbati diventano:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \max\ c^{\mathsf{T}} x \\ A_B\, x \le b_B \\ A_N\, x \le b_N + \varepsilon_N \end{cases} \qquad\qquad (\mathcal{D}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \min\ y^{\mathsf{T}}(b+\varepsilon) \\ y^{\mathsf{T}} A = c^{\mathsf{T}} \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Teorema 3

La soluzione $\bar{x}$ è ottima anche per il primale perturbato $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ se e solo se

$$\varepsilon_i \ge A_i\, \bar{x} - b_i \qquad \forall\ i \in N.$$

Perturbazione del vettore b (componenti non di base)

Esempio. Per il problema primale

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

sappiamo che la soluzione ottima è $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ relativa alla base $B = \{1, 2\}$.

Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq \varepsilon_3 \\ -x_2 \leq \varepsilon_4 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

Dal Teorema 3 si ha che $\bar{x}$ è ottima anche per il problema perturbato se e solo se

$$\begin{cases} \varepsilon_3 \geq -2 \\ \varepsilon_4 \geq -1 \end{cases}$$

Perturbazione del vettore b (componenti di base)

Supponiamo che la soluzione ottima $\bar{x}$ del primale, relativa alla base B, sia non degenere e perturbiamo solo le componenti del vettore b che appartengono alla base B, cioè sommiamo al vettore b un vettore ε tale che

$$\varepsilon_i = 0 \qquad \forall\ i \in N.$$

I problemi $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$ perturbati diventano:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \max\ c^\mathsf{T} x \\ A_B\, x \leq b_B + \varepsilon_B \\ A_N\, x \leq b_N \end{cases} \qquad\qquad (\mathcal{D}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \min\ y^\mathsf{T}(b+\varepsilon) \\ y^\mathsf{T} A = c^\mathsf{T} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Teorema 4

Se il vettore ε è abbastanza piccolo in norma, allora il valore ottimo del primale perturbato $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ è

$$v(\mathcal{P}_\varepsilon) = v(\mathcal{P}) + \sum_{i\in B} \varepsilon_i\, \bar{y}_i.$$

Perturbazione del vettore b (componenti di base)

Esempio. Per il problema primale

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

sappiamo che la soluzione ottima è $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ relativa alla base $B = \{1, 2\}$, mentre $\bar{y}^{\mathsf{T}} = (1, 1, 0, 0)$ è la soluzione ottima duale.
Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 + \varepsilon_1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 + \varepsilon_2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

Se ε è abbastanza piccolo, allora la soluzione ottima di $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ è $\begin{pmatrix} 2 + \varepsilon_1 \\ 1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix}$, relativa sempre alla base $B = \{1, 2\}$. Il valore ottimo di $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ è quindi

$$v(\mathcal{P}_\varepsilon) = 2(2 + \varepsilon_1) + 1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 5 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Esercizio

Consideriamo il problema di produzione 1 (produzione dei collettori rotanti) visto nel capitolo dei modelli e rilassiamo il vincolo di interezza sulle variabili.

a) Trovare una soluzione ottima ed il valore ottimo del problema.

b) Supponiamo che il costo di produzione dei collettori del modello 1 sia di $50 + \alpha$ euro, dove α varia nell'intervallo $[0, 15]$. Qual è il valore ottimo di questo problema perturbato in funzione di α?

c) Supponiamo che il costo di acquisto dei collettori del modello 1 da un'azienda concorrente sia di $61 - \beta$ euro, dove β varia nell'intervallo $[0, 15]$. Qual è il valore ottimo di questo problema perturbato in funzione di β?

d) Supponiamo che l'azienda abbia $10.000 + \gamma$ ore per la fase 1 di lavorazione, dove γ varia nell'intervallo $[0, 500]$. Qual è il valore ottimo di questo problema perturbato in funzione di γ?

e) Supponiamo che l'azienda disponga di $5.000 + \delta$ ore per la fase 2 di lavorazione, dove δ varia nell'intervallo $[0, 500]$. Qual è il valore ottimo di questo problema perturbato in funzione di δ?