

6 esercizi di Programmazione Lineare

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema (primale) di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max & 5x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \end{cases} \quad (P)$$

- a) Scrivere il problema duale del problema (P) .
- b) Data la base $B = \{1, 3\}$, trovare la soluzione di base primale e la soluzione di base duale relative a B . Dire se le soluzioni trovate sono ammissibili e/o degeneri, motivando le risposte.
- c) Usando il teorema degli scarti complementari, dire se il vettore $x = (0, 10)$ è una soluzione ottima del problema (P) .
- d) Effettuare una iterazione dell'algoritmo del simplesso primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$.
- e) Trovare graficamente una soluzione ottima del problema (P) .
- f) Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max & 5x_1 + (2 + \delta)x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \end{cases} \quad (P_\delta)$$

Dire per quali valori del parametro δ la soluzione ottima di (P) è ottima anche del problema perturbato (P_δ) .

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema (primale) di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P)$$

- a) Scrivere il problema duale del problema (P) .
- b) Data la base $B = \{1, 4\}$, trovare la soluzione di base primale e la soluzione di base duale relative a B . Dire se le soluzioni trovate sono ammissibili e/o degeneri, motivando le risposte.
- c) Usando il teorema degli scarti complementari, dire se il vettore $x = (4, 0)$ è una soluzione ottima del problema (P) .
- d) Effettuare una iterazione dell'algoritmo del simplesso primale a partire dalla base $B = \{1, 3\}$.
- e) Trovare graficamente una soluzione ottima del problema (P) .

f) Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & x_1 \leq 4 + \varepsilon_1 \\ & x_2 \leq 3 + \varepsilon_2 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

Supponendo che i parametri ε_1 e ε_2 variano nell'intervallo $[-1, 1]$, trovare il valore ottimo del problema perturbato (P_ε) in funzione di ε_1 e ε_2 .

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema (primale) di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \leq 5 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P)$$

- Scrivere il problema duale del problema (P) .
- Data la base $B = \{3, 4\}$, trovare la soluzione di base primale e la soluzione di base duale relative a B . Dire se le soluzioni trovate sono ammissibili e/o degeneri, motivando le risposte.
- Usando il teorema degli scarti complementari, dire se il vettore $x = (4, 5)$ è una soluzione ottima del problema (P) .
- Trovare graficamente una soluzione ottima del problema (P) .
- Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + \delta x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \leq 5 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P_\delta)$$

Dire per quali valori del parametro δ la soluzione ottima del problema (P) è ottima anche del problema perturbato (P_δ) .

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema (primale) di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P)$$

- Scrivere il problema duale del problema (P) .
- Data la base $B = \{1, 2\}$, trovare la soluzione di base primale e la soluzione di base duale relative a B . Dire se le soluzioni trovate sono ammissibili e/o degeneri, motivando le risposte.
- Usando il teorema degli scarti complementari, dire se il vettore $x = (2, 4)$ è una soluzione ottima del problema (P) .

- d) Effettuare una iterazione dell'algoritmo del simplesso primale a partire dalla base $B = \{4, 5\}$.
- e) Trovare graficamente una soluzione ottima ed il valore ottimo del problema (P) .
- f) Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 + \varepsilon \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

dove il parametro ε varia nell'intervallo $[-1, 1]$. Trovare il valore ottimo del problema perturbato in funzione di ε .

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema (primale) di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max & x_1 + 5x_2 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P)$$

- a) Scrivere il problema duale del problema (P) .
- b) Data la base $B = \{2, 4\}$, trovare la soluzione di base primale e la soluzione di base duale relative a B . Dire se le soluzioni trovate sono ammissibili e/o degeneri, motivando le risposte.
- c) Usando il teorema degli scarti complementari, dire se il vettore $x = (12, 0)$ è una soluzione ottima del problema (P) .
- d) Trovare graficamente una soluzione ottima del problema (P) .
- e) Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\begin{cases} \max & x_1 + 5x_2 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 + \varepsilon_1 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 + \varepsilon_2 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

Sapendo che i parametri ε_1 e ε_2 variano nell'intervallo $[-1, 1]$, trovare il valore ottimo del problema perturbato (P_ε) in funzione di ε_1 e ε_2 .

Esercizio 6. Si consideri il seguente problema (primale) di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max & 5x_1 + x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P)$$

- a) Scrivere il problema duale del problema (P) .

- b) Data la base $B = \{3, 5\}$, trovare la soluzione di base primale e la soluzione di base duale relative a B . Dire se le soluzioni trovate sono ammissibili e/o degeneri, motivando le risposte.
- c) Usando il teorema degli scarti complementari, dire se il vettore $x = (6, 6)$ è una soluzione ottima del problema (P) .
- d) Trovare graficamente una soluzione ottima del problema (P) .
- e) Consideriamo ora il problema perturbato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 4 + \varepsilon_1 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 12 + \varepsilon_2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{array} \right. \quad (P_\varepsilon)$$

Sapendo che i parametri ε_1 e ε_2 variano nell'intervallo $[-1, 1]$, trovare il valore ottimo del problema perturbato (P_ε) in funzione di ε_1 e ε_2 .

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Il problema duale di (P) è

$$\begin{cases} \min & 10y_1 + 4y_2 \\ & y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 5 \\ & y_1 - y_3 = 2 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & y_4 \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

b) La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

che non è ammissibile (perché il vincolo 2 non è rispettato) e non degenera (perché i vincoli 2 e 4 non sono attivi in $\bar{x}$). La soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (5, 2) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = (7/2, 3/2) \quad \bar{y}^T = (7/2, 0, 3/2, 0),$$

quindi $\bar{y}$ è ammissibile (perché $\bar{y}_1 \geq 0$, $\bar{y}_3 \geq 0$) ed è non degenera (perché $\bar{y}_1 \neq 0$, $\bar{y}_3 \neq 0$).

c) Il vettore $(0, 10)$ è ammissibile per (P) . Per il teorema degli scarti complementari, $(0, 10)$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se ammette almeno una soluzione il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \\ y^T (b - Ax) = 0 \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 5 \\ y_1 - y_3 = 2 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \\ y^T (0, 4, 10, 0) = 0 \end{cases}$$

che a sua volta è equivalente a

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 5 \\ y_1 - y_3 = 2 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema è impossibile perché dalle 4 equazioni si ricava che $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = -3 < 0$. Pertanto il vettore $(0, 10)$ non è una soluzione ottima di (P) .

- d) Partendo dalla base $B = \{3, 4\}$, la matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, la soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (-2, -7)$. L'indice uscente è $h = 3$, la direzione di spostamento è $W^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolando

$$A_N W^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ricava che W^3 non è una direzione di recessione, quindi

$$\vartheta = \frac{10}{1} = 10,$$

e l'indice entrante è $k = 1$. La nuova base è $B = \{1, 4\}$ e la corrispondente soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- e) Disegnando gli insiemi di livello della funzione obiettivo, si trova che la soluzione ottima di (P) è il vettore $(4, 6)$.
- f) La soluzione ottima di (P) , cioè il vettore $(4, 6)$, è la soluzione di base relativa alla base $\{1, 2\}$. Notiamo che $(4, 6)$ è una soluzione di base ammissibile anche per il problema perturbato (P_δ) . Quindi se la soluzione di base duale relativa alla base $\{1, 2\}$ è ammissibile per il problema perturbato, allora $(4, 6)$ è ottima anche per il problema perturbato. La soluzione di base duale del problema perturbato relativa alla base $\{1, 2\}$ è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (5, 2 + \delta) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = (5, 2 + \delta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2 + \delta, 3 - \delta),$$

quindi $\bar{y}$ è ammissibile per (P_δ) se $\delta \in [-2, 3]$. Quindi il vettore $(4, 6)$ è una soluzione ottima anche di (P_δ) se $\delta \in [-2, 3]$.

Esercizio 2.

a) Il problema duale di (P) è

$$\begin{cases} \min & -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ & -y_1 + y_2 = 1 \\ & -2y_1 + y_3 - y_4 = 2 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & y_4 \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

b) La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che è ammissibile (perché i vincoli 2 e 3 sono rispettati) e non degenera (perché i vincoli 2 e 3 non sono attivi in $\bar{x}$). La soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (1, 2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 0) \quad \bar{y}^T = (-1, 0, 0, 0),$$

quindi $\bar{y}$ non è ammissibile (perché $\bar{y}_1 < 0$) ed è degenera (perché $\bar{y}_4 = 0$).

c) Il vettore $(4, 0)$ è ammissibile per (P) . Per il teorema degli scarti complementari, $(4, 0)$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se ammette almeno una soluzione il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \\ y^T (b - Ax) = 0 \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = 1 \\ -2y_1 + y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \\ y^T (3, 0, 3, 0) = 0 \end{cases}$$

che a sua volta è equivalente a

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = 1 \\ -2y_1 + y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 = 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema è impossibile perché si ottiene $y_4 = -2$ e $y_4 \geq 0$. Pertanto il vettore $(4, 0)$ non è una soluzione ottima di (P) .

d) Partendo dalla base $B = \{1, 3\}$, la matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

la soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (-1, 0)$.

L'indice uscente è $h = 1$, la direzione di spostamento è $W^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolando

$$A_N W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ricava che W^3 non è una direzione di recessione, quindi

$$\vartheta = \frac{9}{1} = 9,$$

e l'indice entrante è $k = 2$. La nuova base è $B = \{2, 3\}$ e la corrispondente soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- e) Disegnando gli insiemi di livello della funzione obiettivo, si trova che la soluzione ottima di (P) è il vettore $(4, 3)$.
- f) La soluzione ottima di (P) , cioè il vettore $(4, 3)$, è la soluzione di base primale relativa alla base $\{2, 3\}$ e la corrispondente soluzione di base duale è $(0, 1, 2, 0)$. Notiamo che nel problema perturbato (P_ε) , la soluzione di base relativa alla base $\{2, 3\}$ è uguale a $(4 + \varepsilon_1, 3 + \varepsilon_2)$ ed è ammissibile poiché i parametri ε_1 e ε_2 variano tra -1 e 1 . Poiché nel duale di (P_ε) i vincoli sono identici ai vincoli del duale di (P) , la soluzione di base duale $(0, 1, 2, 0)$ relativa alla base $\{2, 3\}$ è ammissibile anche per il duale di (P_ε) . Pertanto $(4 + \varepsilon_1, 3 + \varepsilon_2)$ è ottima per il problema perturbato. Il valore ottimo del problema perturbato è quindi

$$v(P_\varepsilon) = 4 + \varepsilon_1 + 2(3 + \varepsilon_2) = 10 + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2.$$

Alla stessa conclusione si può arrivare sfruttando la soluzione ottima del duale di (P) , cioè $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ e ricordando che

$$v(P_\varepsilon) = v(P) + \bar{y}_1\varepsilon_1 + \bar{y}_2\varepsilon_2 = 10 + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2.$$

Esercizio 3.

a) Il problema duale di (P) è

$$\begin{cases} \min & 9y_1 + 6y_2 + 5y_3 \\ & y_1 + y_2 - y_4 = 3 \\ & y_1 + y_3 - y_5 = 1 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & y_4 \geq 0 \\ & y_5 \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

b) La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

che è ammissibile (perché i vincoli 1, 2 e 5 sono rispettati) e non degenera (perché i vincoli 1, 2 e 5 non sono attivi in $\bar{x}$). La soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (3, 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, -3) \quad \bar{y}^T = (0, 0, 1, -3, 0),$$

quindi $\bar{y}$ non è ammissibile (perché $\bar{y}_4 < 0$) ed è non degenera (perché $\bar{y}_3 \neq 0$ e $\bar{y}_4 \neq 0$).

c) Il vettore $(4, 5)$ è ammissibile per (P) . Per il teorema degli scarti complementari, $(4, 5)$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se ammette almeno una soluzione il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \\ y^T (b - Ax) = 0 \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_4 = 3 \\ y_1 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \\ y_5 \geq 0 \\ y^T (0, 2, 0, 4, 5) = 0 \end{cases}$$

che a sua volta è equivalente a

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_4 = 3 \\ y_1 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema è impossibile perché si ottiene $y_1 = 3$, $y_3 = -2$ e $y_3 \geq 0$. Pertanto il vettore $(4, 5)$ non è una soluzione ottima di (P) .

d) Disegnando gli insiemi di livello della funzione obiettivo, si trova che la soluzione ottima di (P) è il vettore $(6, 3)$.

e) La soluzione ottima di (P) , cioè il vettore $(6, 3)$, è la soluzione di base relativa alla base $\{1, 2\}$. Poiché il problema (P_δ) ha gli stessi vincoli di (P) , il vettore $(6, 3)$ è una soluzione di base ammissibile anche per il problema perturbato (P_δ) . Quindi se la soluzione di base duale relativa alla base $\{1, 2\}$ è ammissibile per il problema perturbato, allora $(6, 3)$ è ottima anche per il problema perturbato. La soluzione di base duale del problema perturbato relativa alla base $\{1, 2\}$ è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (3, \delta) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = (3, \delta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\delta, 3 - \delta),$$

quindi $\bar{y} = (\delta, 3 - \delta, 0, 0, 0)$ è ammissibile per (P_δ) se $\delta \in [0, 3]$. Quindi il vettore $(6, 3)$ è una soluzione ottima anche di (P_δ) se $\delta \in [0, 3]$.

Esercizio 4.

a) Il problema duale di (P) è

$$\begin{cases} \min & 4y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ & y_2 + y_3 - y_4 = 2 \\ & y_1 - y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & y_4 \geq 0 \\ & y_5 \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

b) La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

che non è ammissibile (perché il vincolo 3 non è rispettato) e non degenera (perché i vincoli 3, 4 e 5 non sono attivi in $\bar{x}$). La soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (3, 2) \quad \bar{y}^T = (3, 2, 0, 0, 0),$$

quindi $\bar{y}$ è ammissibile (perché $\bar{y} \geq 0$) e non degenera (perché $\bar{y}_1 \neq 0$ e $\bar{y}_2 \neq 0$).

c) Il vettore $(2, 4)$ è ammissibile per (P) . Per il teorema degli scarti complementari, $(2, 4)$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se ammette almeno una soluzione il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \\ y^T(b - Ax) = 0 \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} y_2 + y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \\ y_5 \geq 0 \end{cases} \quad y^T(0, 4, 0, 2, 4) = 0$$

che a sua volta è equivalente a

$$\begin{cases} y_2 + y_3 - y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema è impossibile perché si ottiene $y_3 = 2$, $y_1 = -1$ e $y_1 \geq 0$. Pertanto il vettore $(2, 4)$ non è una soluzione ottima di (P) .

d) Partendo dalla base $B = \{4, 5\}$, la matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (-2, -1)$.

L'indice uscente è $h = 4$, la direzione di spostamento è $W^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolando

$$A_N W^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

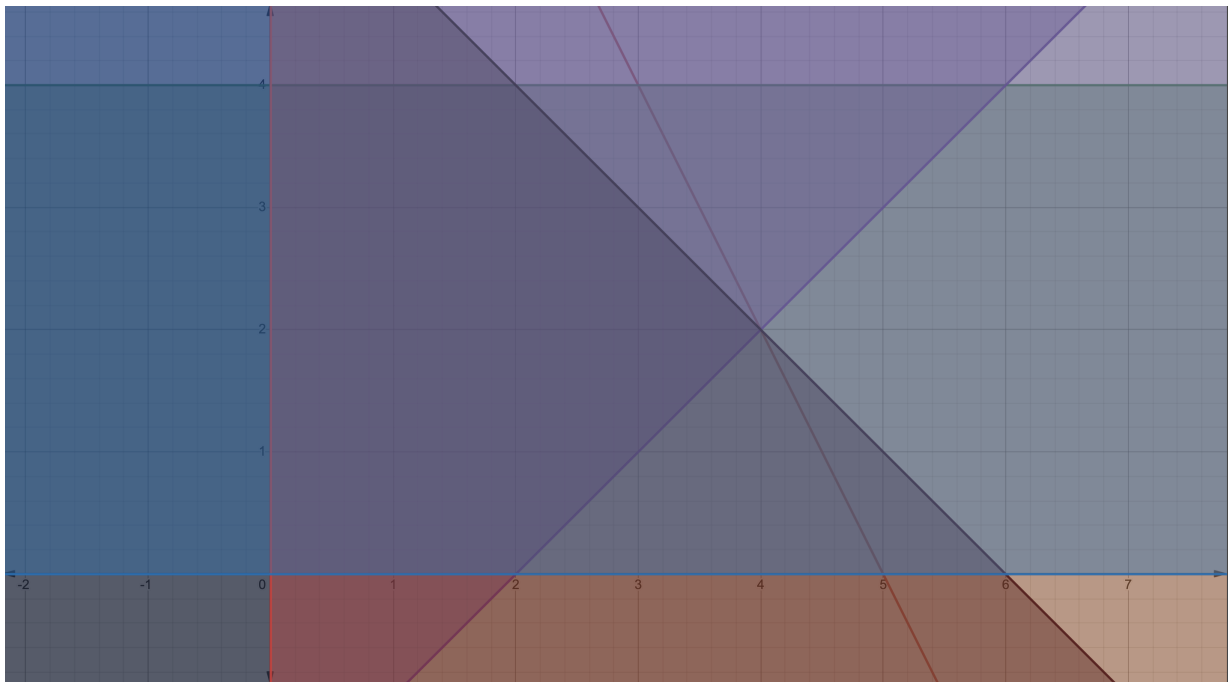
si ricava che W^4 non è una direzione di recessione, quindi

$$\vartheta = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{6}{1} \right\} = 2,$$

e l'indice entrante è $k = 2$. La nuova base è $B = \{2, 5\}$ e la corrispondente soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- e) Disegnando la regione ammissibile e gli insiemi di livello della funzione obiettivo, si trova che la soluzione ottima di (P) è il vettore $(4, 2)$ ed il valore ottimo è uguale a 10.



- f) La soluzione ottima di (P) , cioè il vettore $(4, 2)$, è la soluzione di base primale relativa alla base $\{2, 3\}$ e la corrispondente soluzione di base duale è $(0, 1/2, 3/2, 0, 0)$. Notiamo che nel problema perturbato (P_ε) , la soluzione di base relativa alla base $\{2, 3\}$ è uguale a $(4 + \varepsilon/2, 2 + \varepsilon/2)$ ed è ammissibile poiché il parametro ε varia tra -1 e 1 . Poiché nel duale di (P_ε) i vincoli sono identici ai vincoli del duale di (P) , la soluzione di base duale $(0, 1/2, 3/2, 0, 0)$ relativa alla base $\{2, 3\}$ è ammissibile anche per il duale di (P_ε) . Pertanto $(4 + \varepsilon/2, 2 + \varepsilon/2)$ è ottima per il problema perturbato. Il valore ottimo del problema perturbato è quindi

$$v(P_\varepsilon) = 8 + \varepsilon + 2 + \frac{\varepsilon}{2} = 10 + \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Alla stessa conclusione si può arrivare sfruttando la soluzione ottima del duale di (P) , cioè $\bar{y} = (0, 1/2, 3/2, 0, 0)$ e ricordando che

$$v(P_\varepsilon) = v(P) + \bar{y}_3 \varepsilon = 10 + \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Esercizio 5.

a) Il problema duale di (P) è

$$\begin{cases} \min & 4y_2 + 6y_3 + 12y_4 \\ & -y_1 - y_2 + y_4 = 1 \\ & y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 5 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & y_4 \geq 0 \\ & y_5 \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

b) La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix},$$

che non è ammissibile (perché il vincolo 3 non è rispettato) e non degenera (perché i vincoli 1, 3 e 5 non sono attivi in $\bar{x}$). La soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (1, 5) \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (2, 3) \quad \bar{y}^T = (0, 2, 0, 3, 0),$$

quindi $\bar{y}$ è ammissibile (perché $\bar{y} \geq 0$) e non degenera (perché $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_4 > 0$).

c) Il vettore $(12, 0)$ è ammissibile per (P) . Per il teorema degli scarti complementari, $(12, 0)$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se ammette almeno una soluzione il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \\ y^T(b - Ax) = 0 \end{cases}$$

che equivale al sistema

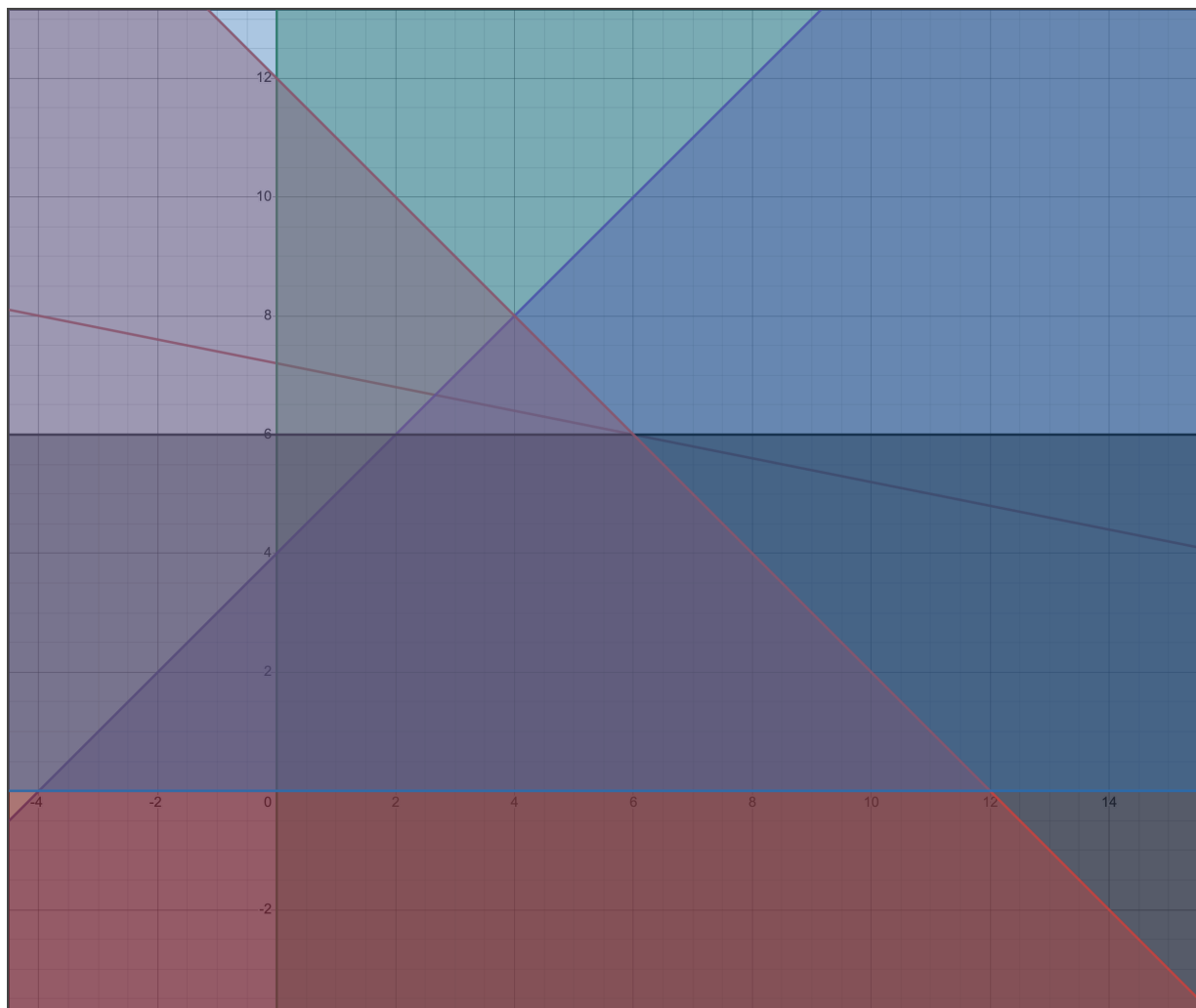
$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_4 = 1 \\ y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 5 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \\ y_5 \geq 0 \\ y^T(12, 16, 6, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

che a sua volta è equivalente a

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_4 = 1 \\ y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 5 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 \geq 0 \\ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema è impossibile perché si ottiene $y_5 = -4 < 0$. Pertanto il vettore $(12, 0)$ non è una soluzione ottima di (P) .

d) Disegnando la regione ammissibile e gli insiemi di livello della funzione obiettivo, si trova che la soluzione ottima di (P) è il vettore $(6, 6)$ ed il valore ottimo è uguale a 36.



- e) La soluzione ottima di (P) , cioè il vettore $(6, 6)$, è la soluzione di base primale relativa alla base $\{3, 4\}$ e la corrispondente soluzione di base duale è $(0, 0, 4, 1, 0)$. Notiamo che nel problema perturbato (P_ε) , la soluzione di base relativa alla base $\{3, 4\}$ è uguale a $(6 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2, 6 + \varepsilon_1)$ ed è ammissibile poiché i parametri ε_1 e ε_2 variano tra -1 e 1 . Poiché nel duale di (P_ε) i vincoli sono identici ai vincoli del duale di (P) , la soluzione di base duale $(0, 0, 4, 1, 0)$ relativa alla base $\{3, 4\}$ è ammissibile anche per il duale di (P_ε) . Pertanto $(6 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2, 6 + \varepsilon_1)$ è ottima per il problema perturbato. Il valore ottimo del problema perturbato è quindi

$$v(P_\varepsilon) = 6 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 5(6 + \varepsilon_1) = 36 + 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Alla stessa conclusione si può arrivare sfruttando la soluzione ottima del duale di (P) , cioè $\bar{y} = (0, 0, 4, 1, 0)$ e ricordando che

$$v(P_\varepsilon) = v(P) + \bar{y}_3\varepsilon_1 + \bar{y}_4\varepsilon_2 = 36 + 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Esercizio 6.

a) Il problema duale di (P) è

$$\begin{cases} \min & 4y_1 + 6y_2 + 12y_3 \\ & y_1 + y_3 - y_4 = 5 \\ & -y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & y_4 \geq 0 \\ & y_5 \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

b) La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che non è ammissibile (perché il vincolo 1 non è rispettato) e non degenera (perché i vincoli 1, 2 e 4 non sono attivi in $\bar{x}$). La soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (5, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (5, 4) \quad \bar{y}^T = (0, 0, 5, 0, 4),$$

quindi $\bar{y}$ è ammissibile (perché $\bar{y} \geq 0$) e non degenera (perché $\bar{y}_3 > 0$ e $\bar{y}_5 > 0$).

c) Il vettore $(6, 6)$ è ammissibile per (P) . Per il teorema degli scarti complementari, $(6, 6)$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se ammette almeno una soluzione il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \\ y^T(b - Ax) = 0 \end{cases}$$

che equivale al sistema

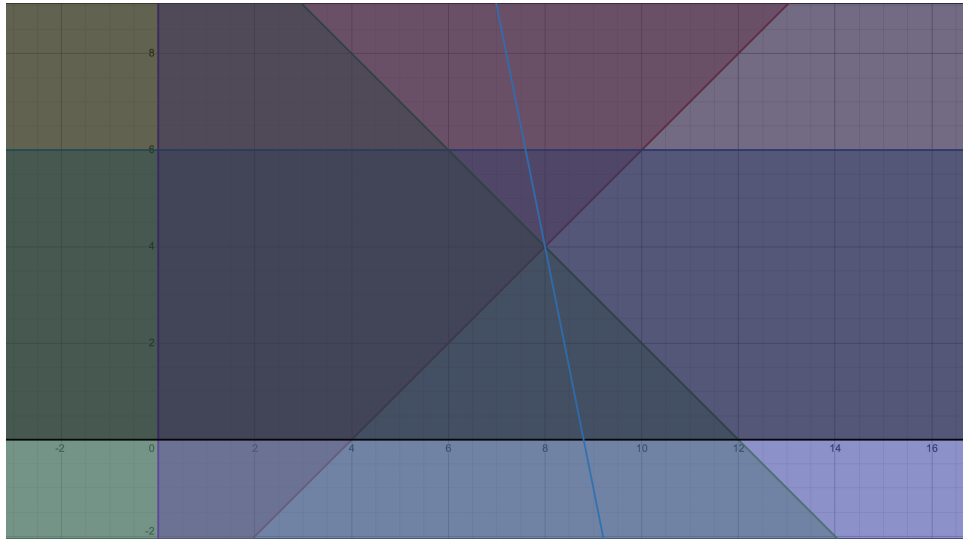
$$\begin{cases} y_1 + y_3 - y_4 = 5 \\ -y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \\ y_5 \geq 0 \\ y^T(4, 0, 0, 6, 6) = 0 \end{cases}$$

che a sua volta è equivalente a

$$\begin{cases} y_1 + y_3 - y_4 = 5 \\ -y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_1 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

L'ultimo sistema è impossibile perché si ottiene $y_2 = -4 < 0$. Pertanto il vettore $(6, 6)$ non è una soluzione ottima di (P) .

d) Disegnando la regione ammissibile e gli insiemi di livello della funzione obiettivo, si trova che la soluzione ottima di (P) è il vettore $(8, 4)$ ed il valore ottimo è uguale a 44.



- e) La soluzione ottima di (P) , cioè il vettore $(8,4)$, è la soluzione di base primale relativa alla base $\{1,3\}$ e la corrispondente soluzione di base duale è $(2,0,3,0,0)$. Notiamo che nel problema perturbato (P_ε) , la soluzione di base relativa alla base $\{1,3\}$ è uguale a

$$(8 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2, 4 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2)$$

ed è ammissibile poiché i parametri ε_1 e ε_2 variano tra -1 e 1 . Poiché nel duale di (P_ε) i vincoli sono identici ai vincoli del duale di (P) , la soluzione di base duale $(2,0,3,0,0)$ relativa alla base $\{1,3\}$ è ammissibile anche per il duale di (P_ε) . Pertanto il vettore $(8 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2, 4 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2)$ è ottimo per il problema perturbato. Il valore ottimo del problema perturbato è quindi

$$v(P_\varepsilon) = 40 + 5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2 + 4 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2 = 44 + 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2.$$

Alla stessa conclusione si può arrivare sfruttando direttamente la soluzione ottima del duale di (P) , cioè $\bar{y} = (2,0,3,0,0)$ e ricordando che

$$v(P_\varepsilon) = v(P) + \bar{y}_1\varepsilon_1 + \bar{y}_3\varepsilon_2 = 44 + 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2.$$