7 - Programmazione Lineare Intera

Mauro Passacantando

Dipartimento di Scienze Economico-Aziendali e Diritto per l'Economia
Università degli Studi di Milano-Bicocca
mauro.passacantando@unimib.it

Corso di Dinamica dei Sistemi Aziendali
Laurea Magistrale in Scienze Economico-Aziendali
Università degli Studi di Milano-Bicocca

Relazioni tra PLI e PL

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera nella forma

$$\begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{P}$$

dove i dati A, b, c sono a componenti intere e la regione ammissibile Ω è limitata.

Relazioni tra PLI e PL

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera nella forma

$$\begin{cases} \max\ c^{\mathsf{T}}x \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{P}$$

dove i dati A, b, c sono a componenti intere e la regione ammissibile Ω è limitata.

Definizione

Il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max\ c^{\mathsf{T}}x \\ Ax \le b \end{cases} \tag{RC}$$

è detto rilassamento continuo di (P).

Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

Teorema

- Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).

Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

Teorema

- Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).
- Se la soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P), allora è ottima anche per (P).

Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

Teorema

- Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).
- Se la soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P), allora è ottima anche per (P).

Spesso la soluzione ottima di (RC) non è ammissibile per (P)...

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata?

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

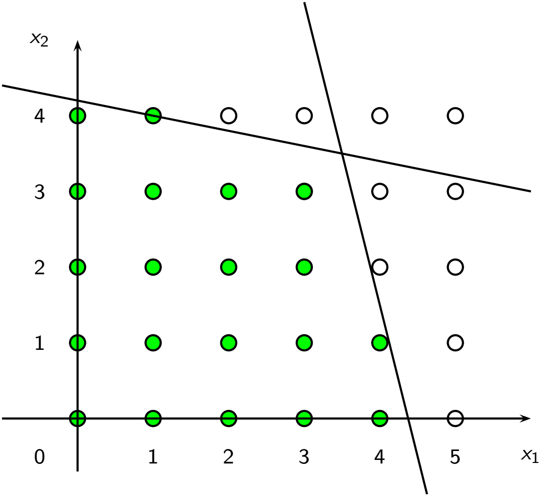
$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

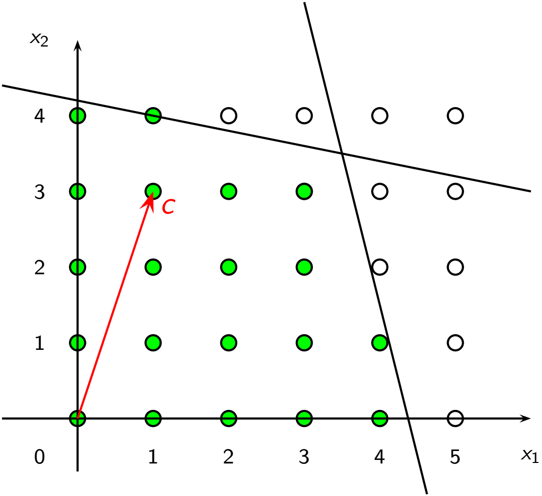


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

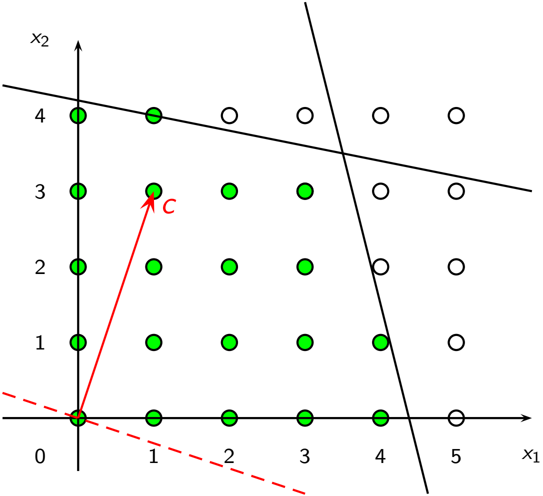


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

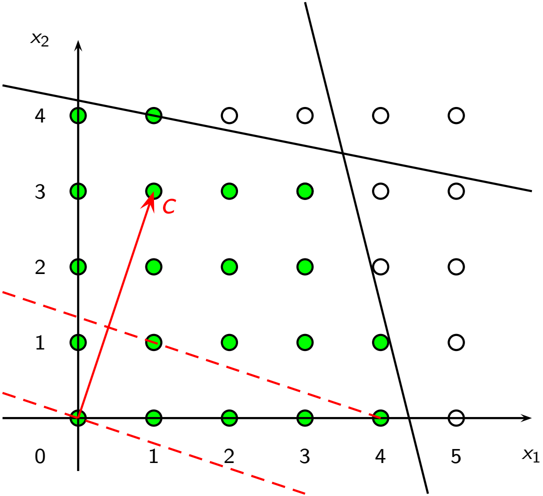


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

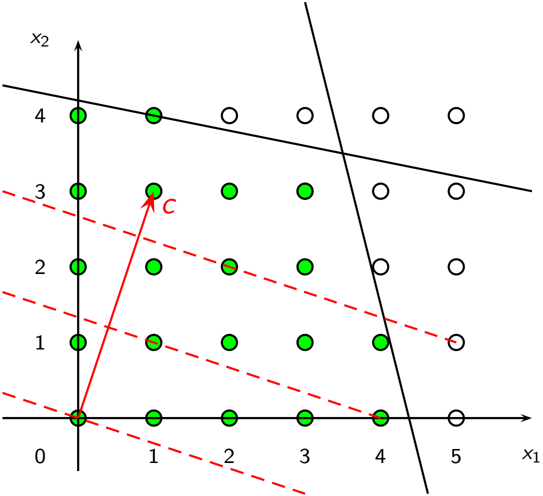


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

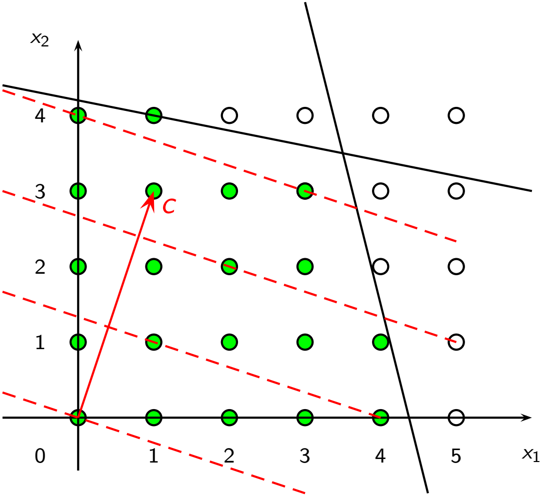


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$



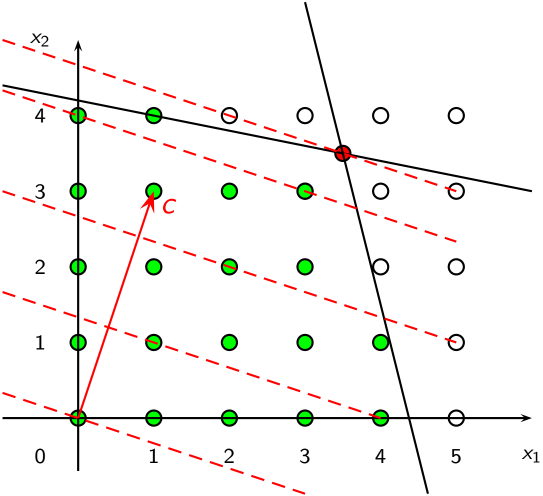
Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max \; x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \le 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \le 35 \\ x \ge 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo



Relazioni tra PLI e PL

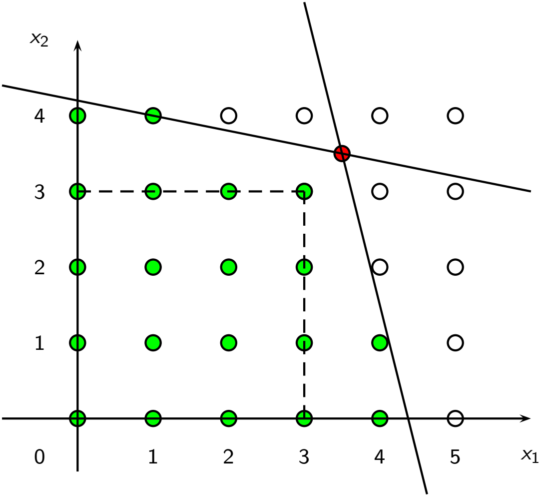
Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo

arrotondamento $\to$ $(3, 3)$



Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

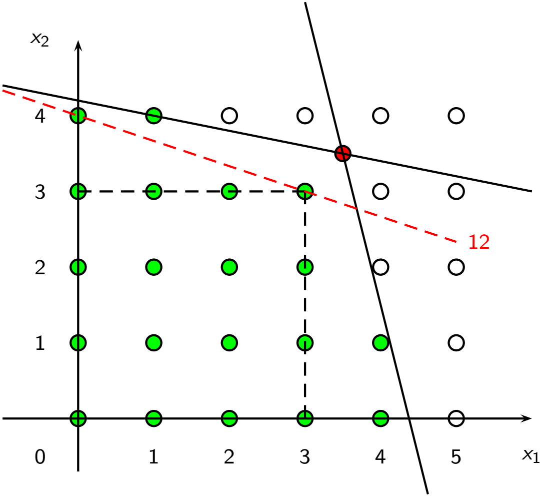
Esempio

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo

arrotondamento $\to (3, 3)$

$(3, 3)$ non è ottima



Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

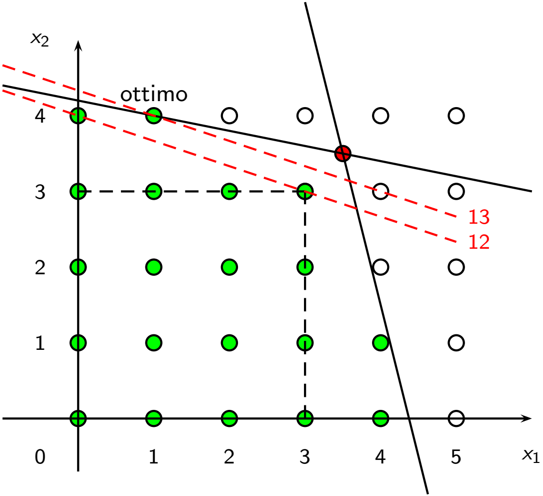
$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo

arrotondamento $\rightarrow (3,3)$

$(3,3)$ non è ottima

la sol. ottima è $(1,4)$



Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e scegliere la soluzione ammissibile più vicina rispetto alla distanza euclidea?

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e scegliere la soluzione ammissibile più vicina rispetto alla distanza euclidea? NO

Esempio

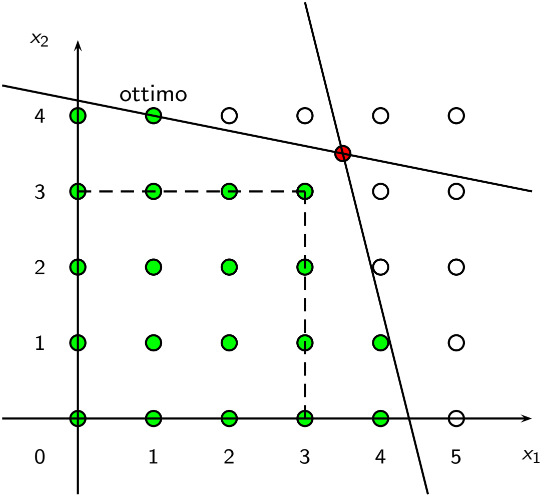
$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo ril. cont.

sol. più vicina è $(3, 3)$

ma $(3, 3)$ non è ottima

la sol. ottima è $(1, 4)$



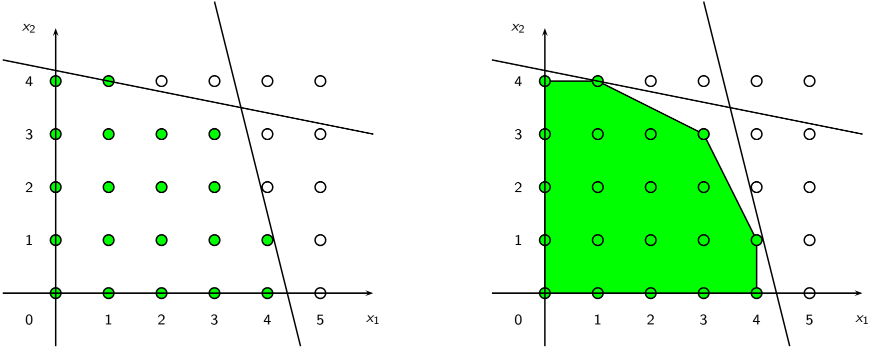
Relazioni tra PLI e PL

Consideriamo i problemi:

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

dove conv(Ω) è l'involucro convesso delle soluzioni ammissibili, cioè il più piccolo insieme convesso che contiene Ω.

Esempio



Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω, cioè sono a componenti intere

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω, cioè sono a componenti intere
- I problemi

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^T x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω, cioè sono a componenti intere
- I problemi

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}}x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}}x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Corollario

Il problema di PLI

$$\max_{x \in \Omega} c^{\mathsf{T}}x$$

è equivalente al problema di PL

$$\max_{x \in \text{conv}(\Omega)} c^{\mathsf{T}}x$$

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω, cioè sono a componenti intere
- I problemi

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Corollario

Il problema di PLI

$$\max_{x \in \Omega} c^{\mathsf{T}} x$$

è equivalente al problema di PL

$$\max_{x \in \text{conv}(\Omega)} c^{\mathsf{T}} x$$

Ma in generale è difficile trovare i vincoli che definiscono $\text{conv}(\Omega)$ ...

Enumerazione esplicita

Consideriamo il problema di PLI

$$\begin{cases} \max \ 5\,x_1 + 6\,x_2 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

Enumerazione esplicita

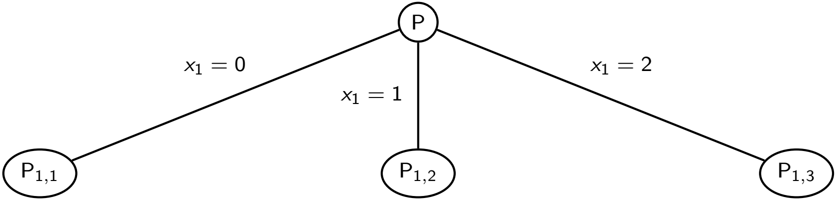
Consideriamo il problema di PLI

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 6\,x_2 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \tag{P}$$

I vincoli implicano che $x_1 = 0$ oppure $x_1 = 1$ oppure $x_1 = 2$.
Facciamo una partizione della regione ammissibile Ω in tre sottoinsiemi:

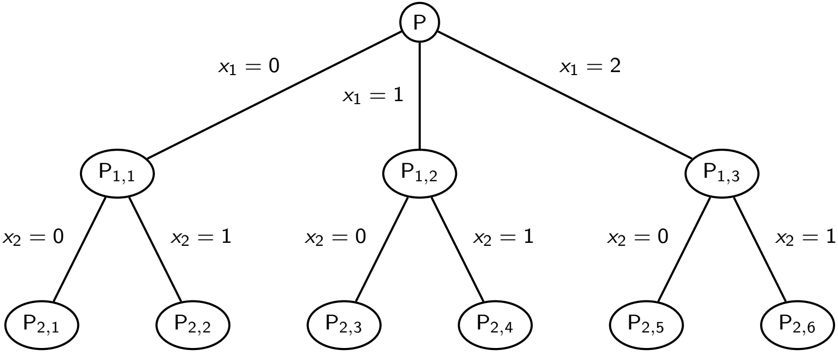
$$\Omega = (\Omega \cap \{x_1 = 0\}) \cup (\Omega \cap \{x_1 = 1\}) \cup (\Omega \cap \{x_1 = 2\})$$

che corrispondono al primo livello dell'albero decisionale:



Enumerazione esplicita

Analogamente, $x_2 = 0$ oppure $x_2 = 1$. Pertanto, l'albero decisionale completo è



I nodi $P_{2,1}, \ldots, P_{2,5}$ corrispondono a soluzioni ammissibili di $(\mathcal{P})$, mentre il nodo $P_{2,6}$ corrisponde alla soluzione $x = (2, 1)$ che non è ammissibile.
I valori della funzione obiettivo in corrispondenza dei nodi $P_{2,1}, \ldots, P_{2,5}$ sono rispettivamente 0, 6, 5, 11, 10. Pertanto, la soluzione ottima è ottenuta nel nodo $P_{2,4}$, cioè $x^* = (1, 1)$.

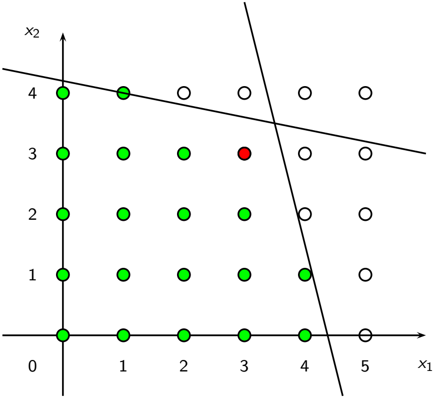
Enumerazione implicita

- L'enumerazione esplicita è molto costosa dal punto di vista computazionale
- Possiamo però esaminare (e scartare) le soluzioni a gruppi, anziché singolarmente $\longrightarrow$ enumerazione implicita

"Dopo aver eliminato l'impossibile, ciò che resta, per improbabile che sia, deve essere la verità." (Arthur Conan Doyle)

Enumerazione implicita

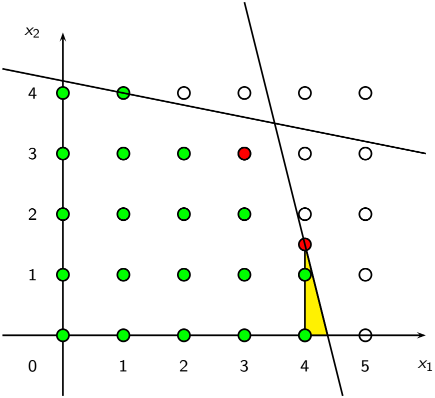
$$\begin{cases} \max \; x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0, \;\; x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$



- Sappiamo che il punto $(3, 3)$ è ammissibile con valore 12.

Enumerazione implicita

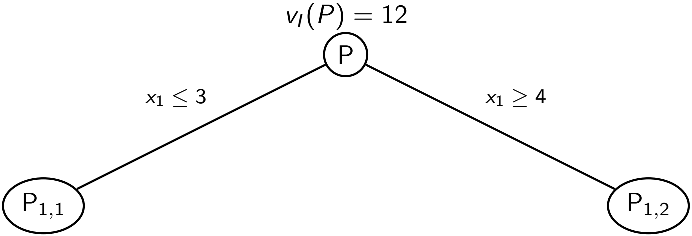
$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0,\ \ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$



- Sappiamo che il punto $(3,3)$ è ammissibile con valore 12.
- Consideriamo il sottoproblema in cui aggiungiamo il vincolo $x_1 \geq 4$: la soluzione ottima del suo rilassamento continuo è $(4, 3/2)$ con valore 8.5, quindi tutte le soluzioni ammissibili del sottoproblema sono peggiori di $(3,3)$ $\rightarrow$ enumerazione implicita.

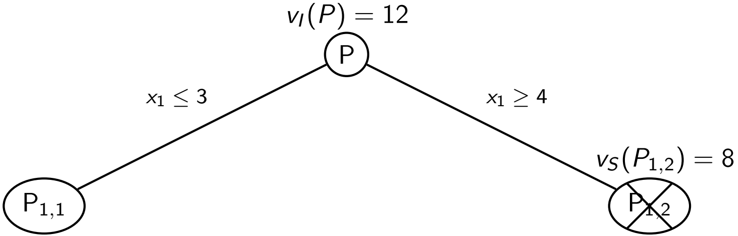
Albero decisionale ridotto

Indichiamo con
$v_I(P)$ una valutazione inferiore (stima per difetto) del valore ottimo di P
$v_S(P)$ una valutazione superiore (stima per eccesso) del valore ottimo di P



Albero decisionale ridotto

Indichiamo con
$v_I(P)$ una valutazione inferiore (stima per difetto) del valore ottimo di P
$v_S(P)$ una valutazione superiore (stima per eccesso) del valore ottimo di P



Metodo Branch and Bound

Componenti principali

Metodo Branch and Bound

Componenti principali

- *Branch (ramificazione)*: partizionare la regione ammissibile in sotto-regioni

Metodo Branch and Bound

Componenti principali

- *Branch (ramificazione)*: partizionare la regione ammissibile in sotto-regioni
- *Bound (valutazione)*: stimare il valore ottimo di ogni sotto-problema

Metodo Branch and Bound

Componenti principali

- *Branch (ramificazione)*: partizionare la regione ammissibile in sotto-regioni
- *Bound (valutazione)*: stimare il valore ottimo di ogni sotto-problema
- *Potatura*: scartare le sotto-regioni che non contengono soluzioni migliori di quella corrente (o chiudere i corrispondenti nodi nell'albero decisionale)

Metodo Branch and Bound

Componenti principali

- *Branch (ramificazione)*: partizionare la regione ammissibile in sotto-regioni
- *Bound (valutazione)*: stimare il valore ottimo di ogni sotto-problema
- *Potatura*: scartare le sotto-regioni che non contengono soluzioni migliori di quella corrente (o chiudere i corrispondenti nodi nell'albero decisionale)
- *Visita*: in quale ordine visitare i nodi nell'albero decisionale

Regole di Branch

Come partizionare la regione ammissibile?

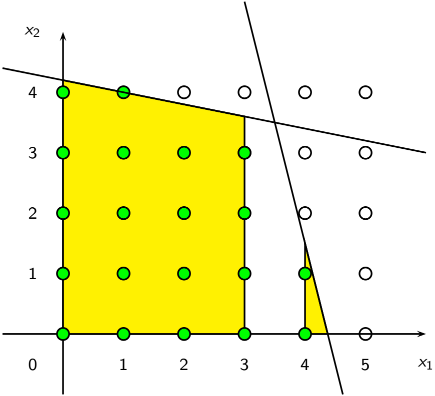
- Le sotto-regioni si generano aggiungendo vincoli

Regole di Branch

Come partizionare la regione ammissibile?

- Le sotto-regioni si generano aggiungendo vincoli
- Il risultato deve essere una partizione della regione ammissibile Ω, per non perdere nessuna soluzione ammissibile (che potrebbe essere ottima)

Branch binario

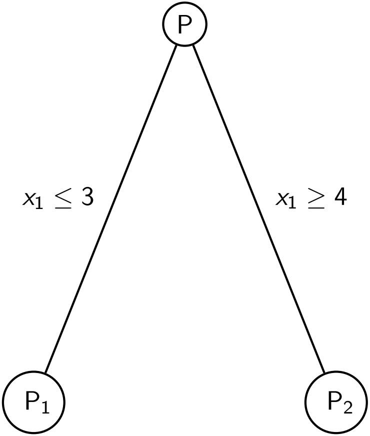


Branch binario

Ogni regione viene partizionata in due sotto-regioni, aggiungendo due vincoli

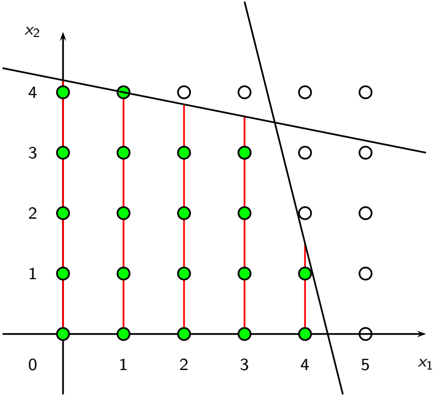
Esempio: $x_1 \leq 3$ e $x_1 \geq 4$

Branch binario

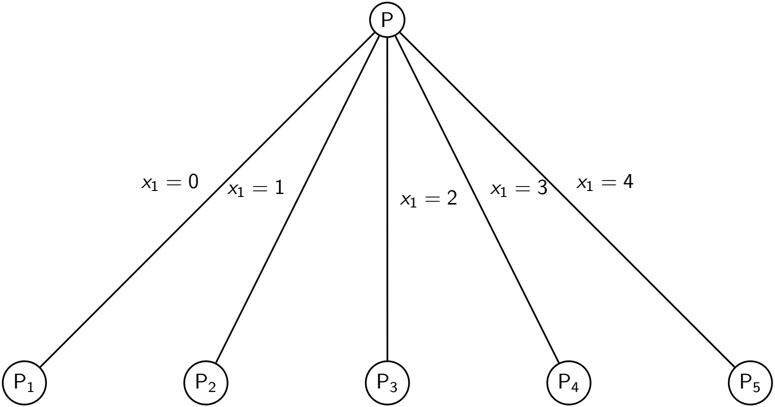


Branch non binario

Ogni regione si partiziona in k sotto-regioni, aggiungendo k vincoli.
Esempio: $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $x_1 = 3$ e $x_1 = 4$



Branch non binario



Bound

Una valutazione inferiore del valore ottimo di P è data dal valore della funzione obiettivo in una qualunque soluzione ammissibile.

Una valutazione superiore del valore ottimo di ogni sotto-problema è data dal valore ottimo di un suo *rilassamento*:

- Rilassamento continuo (eliminare i vincoli di interezza sulle variabili)
  $x \in \{0, 1\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$
  $x \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow x \geq 0$
- Eliminazione di vincoli
- Somma di due o più vincoli
- ...

Criteri di potatura dell'albero decisionale

Un nodo P_i dell'albero decisionale può essere chiuso se vale una qualunque delle seguenti condizioni:

- il sotto-problema P_i non ha soluzioni ammissibili

Criteri di potatura dell'albero decisionale

Un nodo P_i dell'albero decisionale può essere chiuso se vale una qualunque delle seguenti condizioni:

- il sotto-problema P_i non ha soluzioni ammissibili
- $v_S(P_i) \leq v_I(P)$, cioè le soluzioni ammissibili di P_i non sono migliori della soluzione ammissibile corrente

Criteri di potatura dell'albero decisionale

Un nodo P_i dell'albero decisionale può essere chiuso se vale una qualunque delle seguenti condizioni:

- il sotto-problema P_i non ha soluzioni ammissibili
- $v_S(P_i) \leq v_I(P)$, cioè le soluzioni ammissibili di P_i non sono migliori della soluzione ammissibile corrente
- $v_S(P_i) > v_I(P)$ e la soluzione ottima di P_i è ammissibile per P. In tal caso si aggiorna $v_I(P) = v_S(P_i)$.

Visita dell'albero decisionale

In quale ordine visitiamo i nodi dell'albero?

Depth first (in profondità)

- Il prossimo nodo da visitare è uno dei figli del nodo attualmente visitato (se rimasto aperto)
- questa strategia trova rapidamente una soluzione ammissibile, occupa poca memoria, ma non tiene conto della qualità della soluzione trovata

Visita dell'albero decisionale

In quale ordine visitiamo i nodi dell'albero?

Depth first (in profondità)

- Il prossimo nodo da visitare è uno dei figli del nodo attualmente visitato (se rimasto aperto)
- questa strategia trova rapidamente una soluzione ammissibile, occupa poca memoria, ma non tiene conto della qualità della soluzione trovata

Best first

- Il prossimo nodo da visitare è il più promettente, cioè quello con il massimo valore di v_S
- trova rapidamente una soluzione ammissibile, occupa molto memoria, ma tiene conto della qualità della soluzione trovata

Visita dell'albero decisionale

In quale ordine visitiamo i nodi dell'albero?

Depth first (in profondità)

- Il prossimo nodo da visitare è uno dei figli del nodo attualmente visitato (se rimasto aperto)
- questa strategia trova rapidamente una soluzione ammissibile, occupa poca memoria, ma non tiene conto della qualità della soluzione trovata

Best first

- Il prossimo nodo da visitare è il più promettente, cioè quello con il massimo valore di v_S
- trova rapidamente una soluzione ammissibile, occupa molto memoria, ma tiene conto della qualità della soluzione trovata

Breadth first (in ampiezza)

- Si esplorano prima tutti i nodi dello stesso livello
- in generale non fornisce buone prestazioni dal punto di vista computazionale

Metodo Branch and bound

1. Genera il nodo radice P (da visitare), trova una soluzione ammissibile per P e calcola una $v_I(P)$.

Metodo Branch and bound

1. Genera il nodo radice P (da visitare), trova una soluzione ammissibile per P e calcola una $v_I(P)$.
2. Se tutti i nodi sono stati visitati, allora STOP (la soluzione ammissibile corrente è ottima).

Metodo Branch and bound

1. Genera il nodo radice P (da visitare), trova una soluzione ammissibile per P e calcola una $v_I(P)$.
2. Se tutti i nodi sono stati visitati, allora STOP (la soluzione ammissibile corrente è ottima).
3. Seleziona un nodo P_i da visitare.

Metodo Branch and bound

1. Genera il nodo radice P (da visitare), trova una soluzione ammissibile per P e calcola una $v_I(P)$.
2. Se tutti i nodi sono stati visitati, allora STOP (la soluzione ammissibile corrente è ottima).
3. Seleziona un nodo P_i da visitare.
4. Se P_i non contiene soluzioni ammissibili, allora chiudi il nodo P_i e torna al passo 2.

Metodo Branch and bound

1. Genera il nodo radice P (da visitare), trova una soluzione ammissibile per P e calcola una $v_I(P)$.
2. Se tutti i nodi sono stati visitati, allora STOP (la soluzione ammissibile corrente è ottima).
3. Seleziona un nodo P_i da visitare.
4. Se P_i non contiene soluzioni ammissibili, allora chiudi il nodo P_i e torna al passo 2.
5. (Bound) risolvi un rilassamento di P_i e calcola $v_S(P_i)$.

Metodo Branch and bound

1. Genera il nodo radice P (da visitare), trova una soluzione ammissibile per P e calcola una $v_I(P)$.
2. Se tutti i nodi sono stati visitati, allora STOP (la soluzione ammissibile corrente è ottima).
3. Seleziona un nodo P_i da visitare.
4. Se P_i non contiene soluzioni ammissibili, allora chiudi il nodo P_i e torna al passo 2.
5. (Bound) risolvi un rilassamento di P_i e calcola $v_S(P_i)$.
   - se $v_S(P_i) \leq v_I(P)$, allora chiudi il nodo P_i e torna al passo 2.
   - se $v_S(P_i) > v_I(P)$ e la soluzione ottima del rilassamento di P_i è ammissibile per P, allora chiudi il nodo P_i, aggiorna la soluzione ammissibile, poni $v_I(P) = v_S(P_i)$ e torna al passo 2.
6. (Branch) Partiziona la regione ammissibile di P_i in sotto-regioni e genera nuovi nodi da visitare. Torna al passo 2.

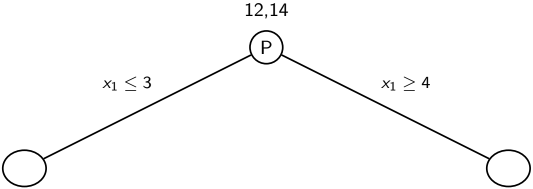
Esempio

Applichiamo il metodo Branch and Bound per risolvere il problema di PLI

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0,\ \ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \qquad (P)$$

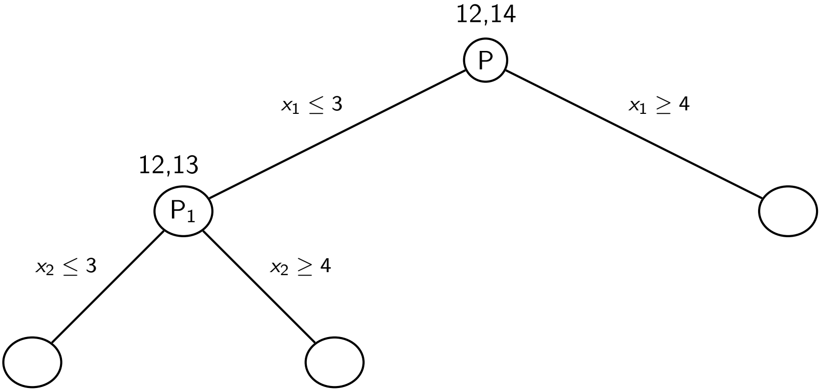
In ogni nodo dell'albero decisionale risolviamo il rilassamento continuo, usiamo un *branch* binario basato sulla prima componente non intera della soluzione ottima del rilassamento. Visitiamo l'albero decisionale in profondità.

Sappiamo che $(3, 3)$ è una soluzione ammissibile, quindi $v_I(P) = 12$.
Sappiamo che la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(7/2, 7/2)$, quindi $v_S(P) = 14$. Il nodo P rimane aperto. Branch: $x_1 \leq \lfloor 7/2 \rfloor = 3$ oppure $x_1 \geq \lceil 7/2 \rceil = 4$.



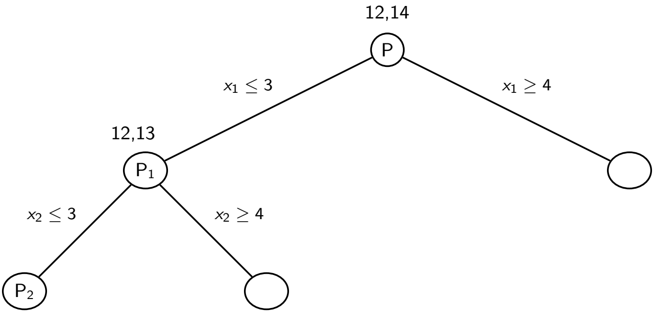
Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_1 è $(3, 18/5)$, non è ammissibile ed ha valore 13.8, quindi $v_S(P_1) = 13 > 12 = v_I(P)$. Pertanto il nodo P_1 rimane aperto.
Dal nodo P_1 facciamo *branch* binario sulla variabile x_2: $x_2 \leq 3$ oppure $x_2 \geq 4$.



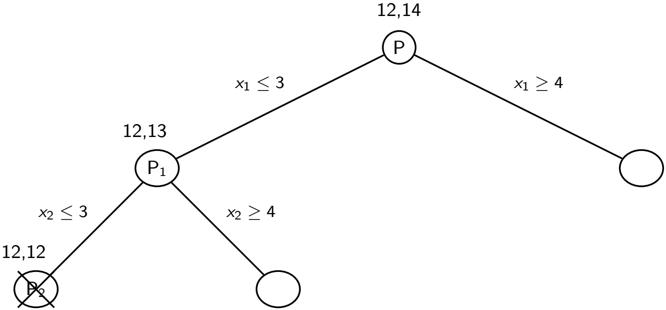
Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(3,3)$, quindi $v_S(P_2) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo P_2.



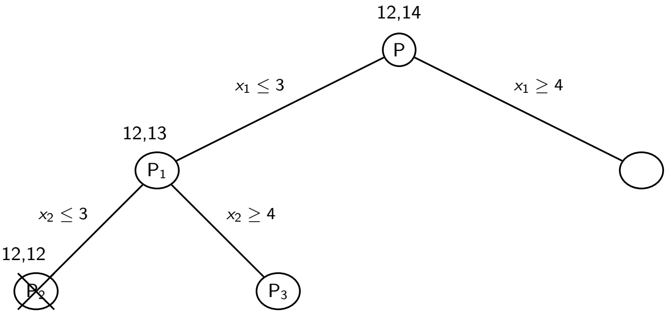
Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(3, 3)$, quindi $v_S(P_2) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo P_2.



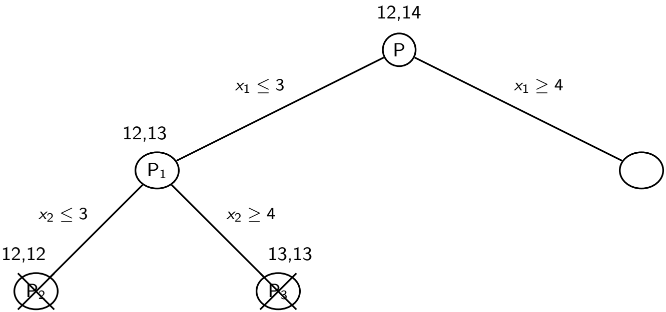
Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(3,3)$, quindi $v_S(P_2) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo P_2.
Visitiamo ora l'altro nodo figlio di P_1. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(1,4)$ e $v_S(P_3) = 13 > 12 = v_I(P)$. Poiché $(1,4)$ è ammissibile per P, aggiorniamo $v_I(P) = 13$ e chiudiamo il nodo P_3.



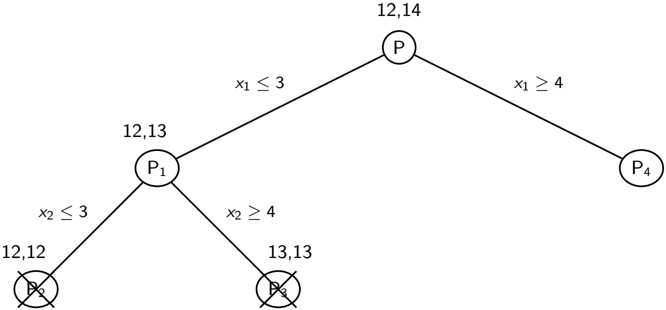
Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(3,3)$, quindi $v_S(P_2) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo P_2.
Visitiamo ora l'altro nodo figlio di P_1. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(1,4)$ e $v_S(P_3) = 13 > 12 = v_I(P)$. Poiché $(1,4)$ è ammissibile per P, aggiorniamo $v_I(P) = 13$ e chiudiamo il nodo P_3.



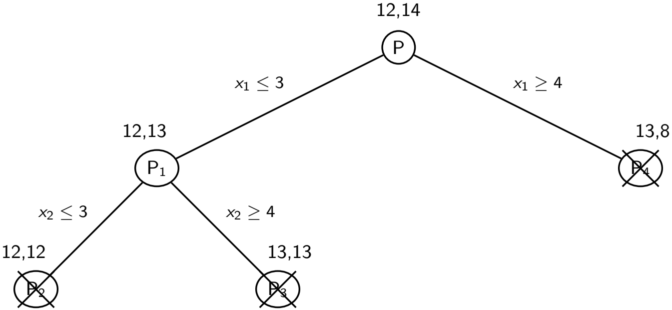
Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(3, 3)$, quindi $v_S(P_2) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo P_2.
Visitiamo ora l'altro nodo figlio di P_1. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(1, 4)$ e $v_S(P_3) = 13 > 12 = v_I(P)$. Poiché $(1, 4)$ è ammissibile per P, aggiorniamo $v_I(P) = 13$ e chiudiamo il nodo P_3.
È rimasto da visitare l'altro figlio del nodo P. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_4 è $(4, 3/2)$ con valore 8.5, quindi $v_S(P_4) = 8 < 13 = v_I(P)$. Pertanto, chiudiamo il nodo P_4.



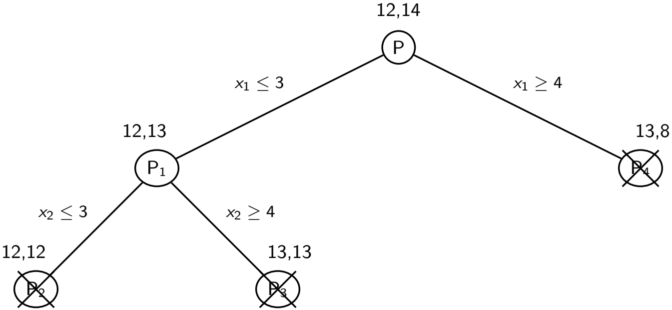
Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_2$ è $(3,3)$, quindi $v_S(P_2) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo P$_2$.
Visitiamo ora l'altro nodo figlio di P$_1$. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_3$ è $(1,4)$ e $v_S(P_3) = 13 > 12 = v_I(P)$. Poiché $(1,4)$ è ammissibile per P, aggiorniamo $v_I(P) = 13$ e chiudiamo il nodo P$_3$.
È rimasto da visitare l'altro figlio del nodo P. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_4$ è $(4, 3/2)$ con valore 8.5, quindi $v_S(P_4) = 8 < 13 = v_I(P)$. Pertanto, chiudiamo il nodo P$_4$.



Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(3,3)$, quindi $v_S(P_2) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo P_2.
Visitiamo ora l'altro nodo figlio di P_1. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(1,4)$ e $v_S(P_3) = 13 > 12 = v_I(P)$. Poiché $(1,4)$ è ammissibile per P, aggiorniamo $v_I(P) = 13$ e chiudiamo il nodo P_3.
È rimasto da visitare l'altro figlio del nodo P. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_4 è $(4, 3/2)$ con valore 8.5, quindi $v_S(P_4) = 8 < 13 = v_I(P)$. Pertanto, chiudiamo il nodo P_4.



Poiché tutti i nodi dell'albero sono stati visitati, la soluzione ottima di P è $(1,4)$ ed il valore ottimo è 13.