

# Esercizi sul metodo Branch and Bound per la Programmazione Lineare Intera

Risolvere i problemi di Programmazione Lineare Intera che seguono con il seguente metodo Branch and Bound:

- la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta arrotondando la soluzione ottima del rilassamento continuo del nodo radice;
- in ogni nodo dell'albero risolvere il rilassamento continuo;
- in ogni nodo che rimane aperto fare un *branch* binario istanziando la prima variabile che non ha un valore intero nella soluzione ottima del rilassamento continuo;
- visitare in ampiezza l'albero di enumerazione.

**Esercizio 1.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 2.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 3.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 4.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 7x_1 + 8x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 5.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 7x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 6.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 7.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 8.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 20x_1 + 17x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 9.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_1 - 3x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 10.**

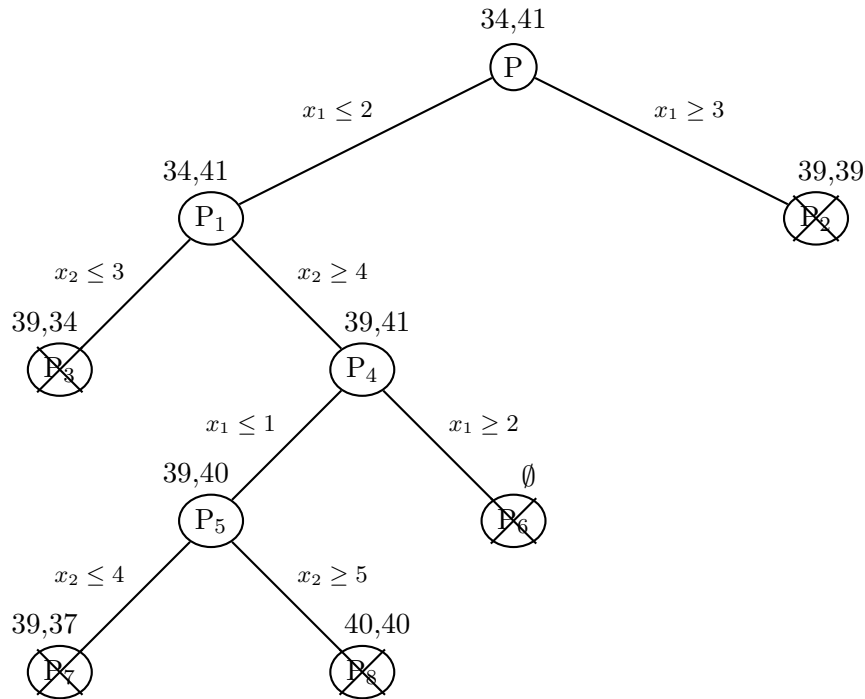
$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

**Esercizio 11.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 32x_1 + 20x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

# Soluzioni

## Esercizio 1.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2.25, 3.75)$ , quindi  $v_S(P) = 41$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(2, 3)$ , quindi  $v_I(P) = 34$ .

P<sub>1</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 3.88)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 41 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>2</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3)$  e  $v_S(P_2) = 39$ . Poiché  $(3, 3)$  è a componenti intere, aggiorniamo  $v_I(P) = 39$  e chiudiamo il nodo.

P<sub>3</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 3)$  e  $v_S(P_3) = 34 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>4</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1.8, 4)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_4) = 41 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>5</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1, 4.44)$  e  $v_S(P_5) = 40 > v_I(P)$ , il nodo rimane aperto.

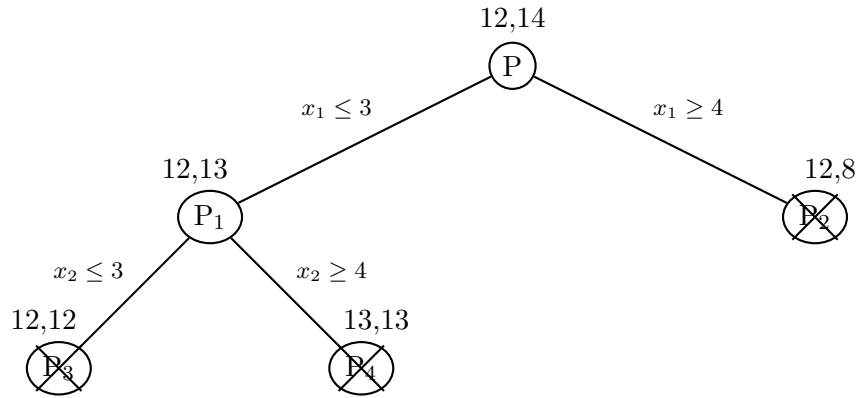
P<sub>6</sub>: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>7</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1, 4)$  e  $v_S(P_7) = 37 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>8</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(0, 5)$  e  $v_S(P_8) = 40$ . Poiché  $(0, 5)$  è a componenti intere, aggiorniamo  $v_I(P) = 40$  e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(0, 5)$  di valore 40.

## Esercizio 2.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3.5, 3.5)$ , quindi  $v_S(P) = 14$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(3, 3)$ , quindi  $v_I(P) = 12$ .

P<sub>1</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3.6)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 13 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

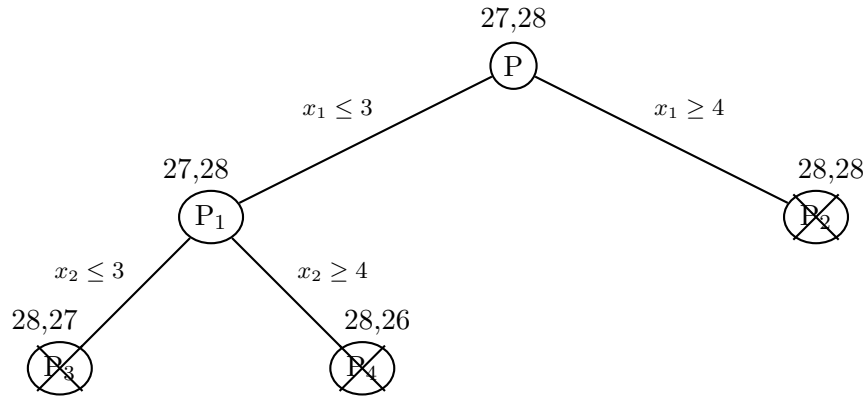
P<sub>2</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4, 1.5)$  e  $v_S(P_2) = 8 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>3</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3)$  e  $v_S(P_3) = 12 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>4</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1, 4)$  e  $v_S(P_4) = 13$ . Poiché  $(1, 4)$  è a componenti intere, aggiorniamo  $v_I(P) = 13$  e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(1, 4)$  di valore 13.

### Esercizio 3.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3.2, 3.2)$ , quindi  $v_S(P) = 28$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(3, 3)$ , quindi  $v_I(P) = 27$ .

$P_1$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3.33)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 28 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

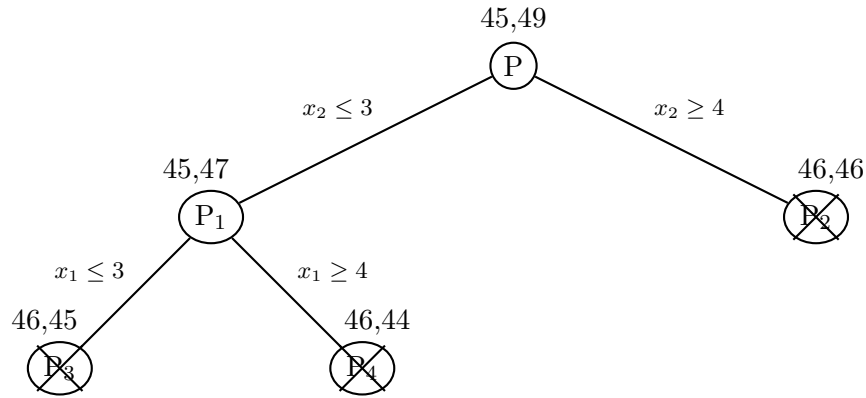
$P_2$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4, 2)$  che è ammissibile e  $v_S(P_2) = 28$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 28$  e chiudiamo il nodo.

$P_3$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3)$  e  $v_S(P_3) = 27 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

$P_4$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 4)$  e  $v_S(P_4) = 26 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(4, 2)$  di valore 28.

#### Esercizio 4.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3.5)$ , quindi  $v_S(P) = 49$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(3, 3)$ , quindi  $v_I(P) = 45$ .

P<sub>1</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3.33, 3)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 47 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

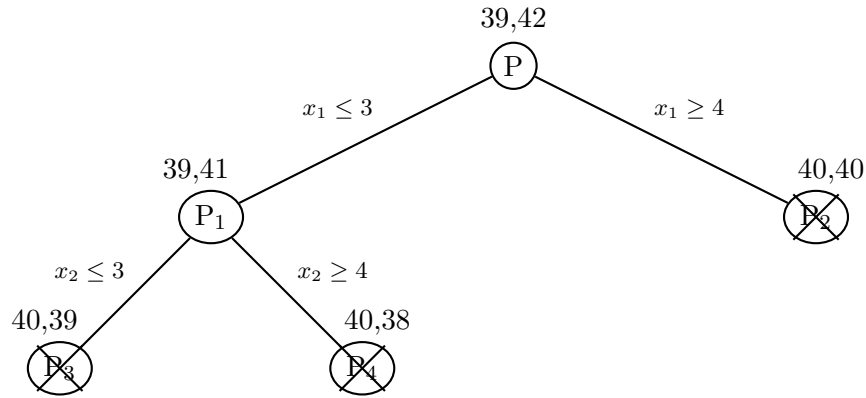
P<sub>2</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 4)$  che è ammissibile e  $v_S(P_2) = 46$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 46$  e chiudiamo il nodo.

P<sub>3</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3)$  e  $v_S(P_3) = 45 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>4</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4, 2)$  e  $v_S(P_4) = 44 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(2, 4)$  di valore 46.

**Esercizio 5.**



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3.5, 3)$ , quindi  $v_S(P) = 42$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(3, 3)$ , quindi  $v_I(P) = 39$ .

P<sub>1</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3.33)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 41 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>2</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4, 2)$  che è ammissibile e  $v_S(P_2) = 40$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 40$  e chiudiamo il nodo.

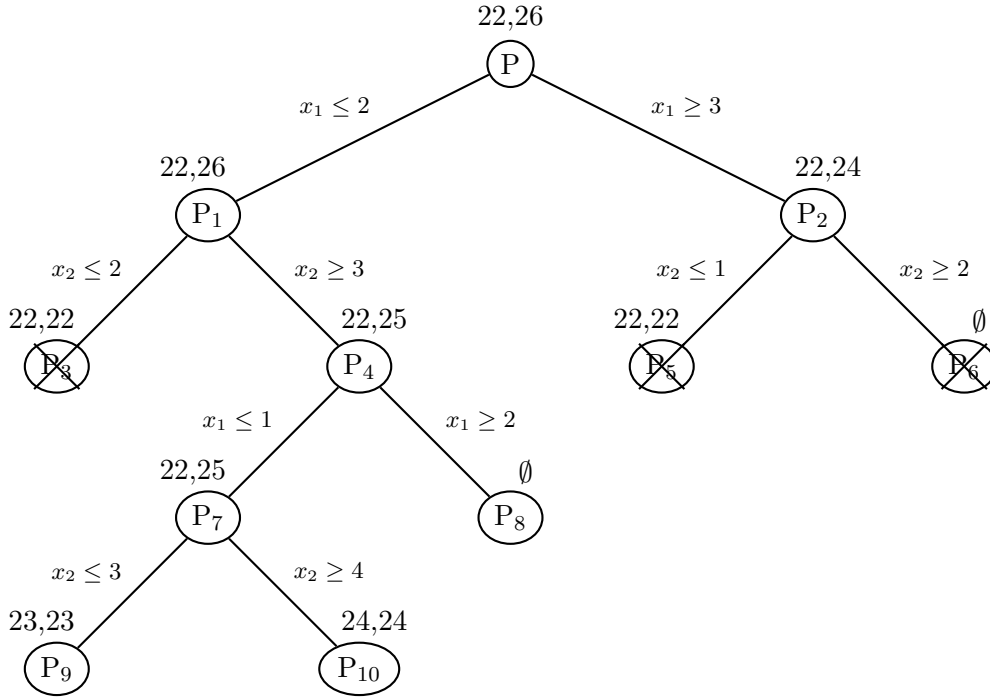
P<sub>3</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3)$  e  $v_S(P_3) = 39 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>4</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 4)$  e  $v_S(P_4) = 38 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(4, 2)$  di valore 40.



### Esercizio 6.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2.4, 2.4)$ , quindi  $v_S(P) = 26$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(2, 2)$ , quindi  $v_I(P) = 22$ .

P<sub>1</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 2.66)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 26 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>2</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 1.5)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_2) = 24 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>3</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 2)$  e  $v_S(P_3) = 22 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>4</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1.5, 3)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_4) = 25 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>5</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3.33, 1)$  e  $v_S(P_5) = 22 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>6</sub>: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>7</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1, 3.33)$  e  $v_S(P_7) = 25 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

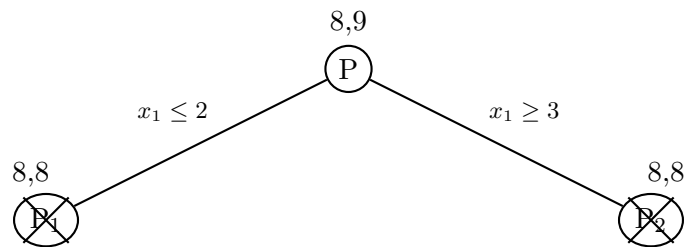
P<sub>8</sub>: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>9</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(1, 3)$  e  $v_S(P_9) = 23$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 23$  e chiudiamo il nodo.

P<sub>10</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(0, 4)$  e  $v_S(P_{10}) = 24$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 24$  e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(0, 4)$  di valore 24.

### Esercizio 7.



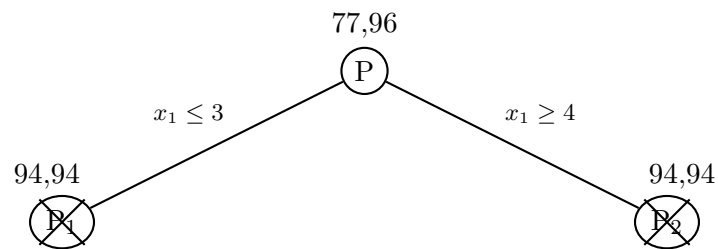
P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2.5, 3.5)$ , quindi  $v_S(P) = 9$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(2, 3)$ , quindi  $v_I(P) = 8$ .

$P_1$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 3.2)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 8 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

$P_2$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 2.8)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_2) = 8 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(2, 3)$  di valore 8.

**Esercizio 8.**



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3.75, 1.25)$ , quindi  $v_S(P) = 96$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(3, 1)$ , quindi  $v_I(P) = 77$ .

$P_1$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 2)$  che è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 94$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 94$  e chiudiamo il nodo.

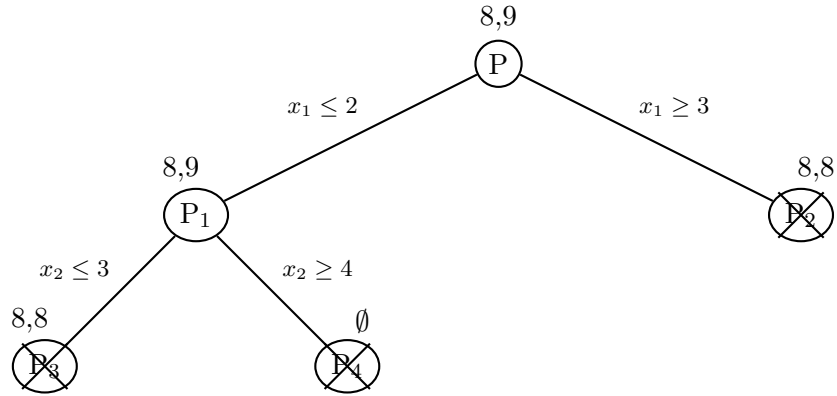
$P_2$ : la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4, 0.83)$  e  $v_S(P_2) = 94 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(3, 2)$  di valore 94.

**Esercizio 9.**

P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(5, 0)$  ed è a componenti intere, quindi è la soluzione ottima del problema con valore 5.

**Esercizio 10.**



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2.3, 3.78)$ , quindi  $v_S(P) = 9$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(2, 3)$ , quindi  $v_I(P) = 8$ .

P<sub>1</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 3.6)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 9 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

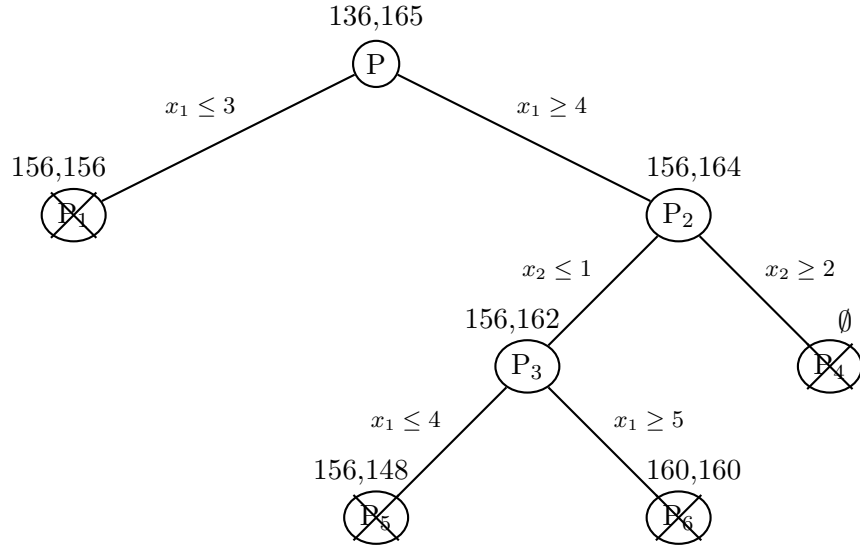
P<sub>2</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 2.8)$  e  $v_S(P_2) = 8 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>3</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(2, 3)$  e  $v_S(P_3) = 8 = v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>4</sub>: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(2, 3)$  di valore 8.

**Esercizio 11.**



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3.75, 2.25)$ , quindi  $v_S(P) = 165$ . Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile  $(3, 2)$ , quindi  $v_I(P) = 136$ .

P<sub>1</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(3, 3)$  che è a componenti intere e  $v_S(P_1) = 156$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 156$  e chiudiamo il nodo.

P<sub>2</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4, 1.8)$  che non è a componenti intere e  $v_S(P_2) = 164 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>3</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4.44, 1)$  e  $v_S(P_3) = 162 > v_I(P)$ , quindi il nodo rimane aperto.

P<sub>4</sub>: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>5</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(4, 1)$  e  $v_S(P_5) = 148 < v_I(P)$ , quindi chiudiamo il nodo.

P<sub>6</sub>: la soluzione ottima del rilassamento continuo è  $(5, 0)$  che è a componenti intere e  $v_S(P_6) = 160$ , quindi aggiorniamo  $v_I(P) = 160$  e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è  $(5, 0)$  di valore 160.