

Esercizi sul metodo Branch and Bound per la Programmazione Lineare Intera

Risolvere i problemi di Programmazione Lineare Intera che seguono con il seguente metodo Branch and Bound:

- la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta arrotondando la soluzione ottima del rilassamento continuo del nodo radice;
- in ogni nodo dell'albero risolvere il rilassamento continuo;
- in ogni nodo che rimane aperto fare un *branch* binario istanziando la prima variabile che non ha un valore intero nella soluzione ottima del rilassamento continuo;
- visitare in ampiezza l'albero di enumerazione.

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 2.

$$\begin{cases} \max x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 3.

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 4.

$$\begin{cases} \max 7x_1 + 8x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 5.

$$\begin{cases} \max 7x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 6.

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 7.

$$\begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 8.

$$\begin{cases} \max 20x_1 + 17x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 9.

$$\begin{cases} \max x_1 - 3x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 10.

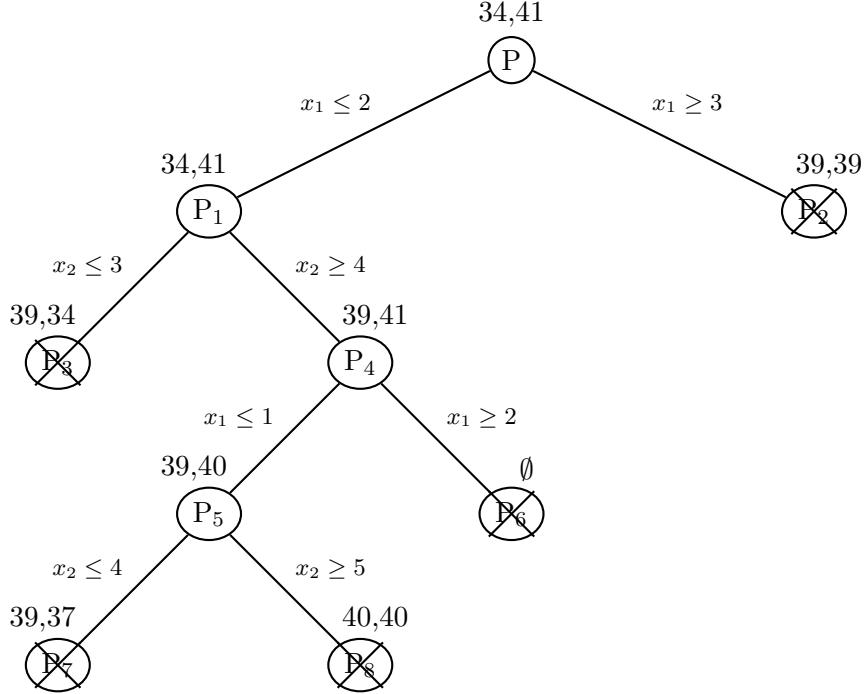
$$\begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 11.

$$\begin{cases} \max 32x_1 + 20x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soluzioni

Esercizio 1.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2.25, 3.75)$, quindi $v_S(P) = 41$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(2, 3)$, quindi $v_I(P) = 34$.
 P₁: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 3.88)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 41 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

P₂: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3)$ e $v_S(P_2) = 39$. Poiché $(3, 3)$ è a componenti intere, aggiorniamo $v_I(P) = 39$ e chiudiamo il nodo.

P₃: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 3)$ e $v_S(P_3) = 34 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₄: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1.8, 4)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_4) = 41 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

P₅: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 4.44)$ e $v_S(P_5) = 40 > v_I(P)$, il nodo rimane aperto.

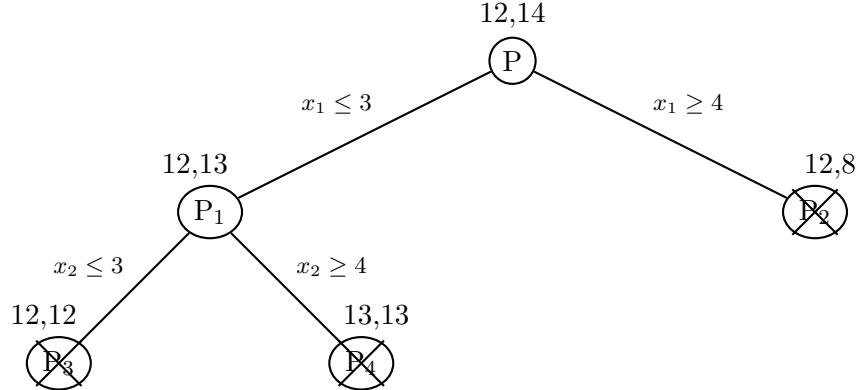
P₆: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P₇: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 4)$ e $v_S(P_7) = 37 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₈: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(0, 5)$ e $v_S(P_8) = 40$. Poiché $(0, 5)$ è a componenti intere, aggiorniamo $v_I(P) = 40$ e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(0, 5)$ di valore 40.

Esercizio 2.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3.5, 3.5)$, quindi $v_S(P) = 14$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(3, 3)$, quindi $v_I(P) = 12$.
 P₁: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3.6)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 13 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

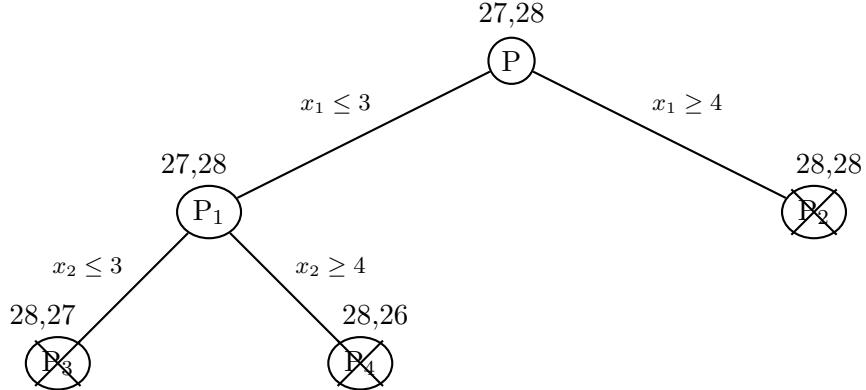
P₂: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4, 1.5)$ e $v_S(P_2) = 8 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₃: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3)$ e $v_S(P_3) = 12 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₄: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 4)$ e $v_S(P_4) = 13$. Poiché $(1, 4)$ è a componenti intere, aggiorniamo $v_I(P) = 13$ e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(1, 4)$ di valore 13.

Esercizio 3.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3.2, 3.2)$, quindi $v_S(P) = 28$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(3, 3)$, quindi $v_I(P) = 27$.
 P₁: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3.33)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 28 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

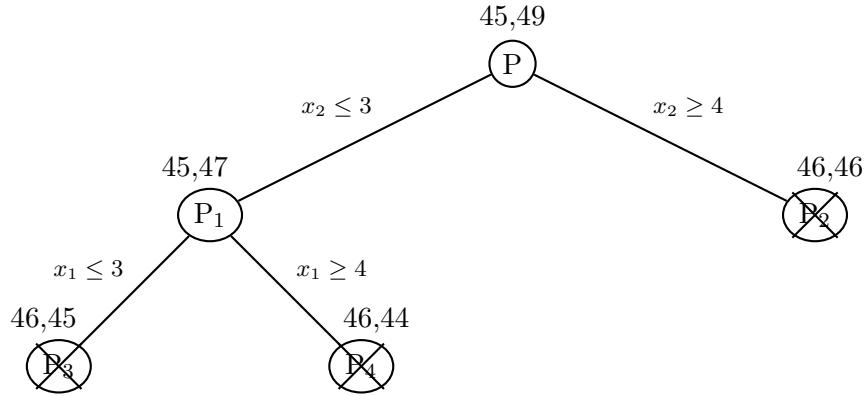
P₂: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4, 2)$ che è ammissibile e $v_S(P_2) = 28$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 28$ e chiudiamo il nodo.

P₃: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3)$ e $v_S(P_3) = 27 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₄: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 4)$ e $v_S(P_4) = 26 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(4, 2)$ di valore 28.

Esercizio 4.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3.5)$, quindi $v_S(P) = 49$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(3, 3)$, quindi $v_I(P) = 45$.

P_1 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3.33, 3)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 47 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

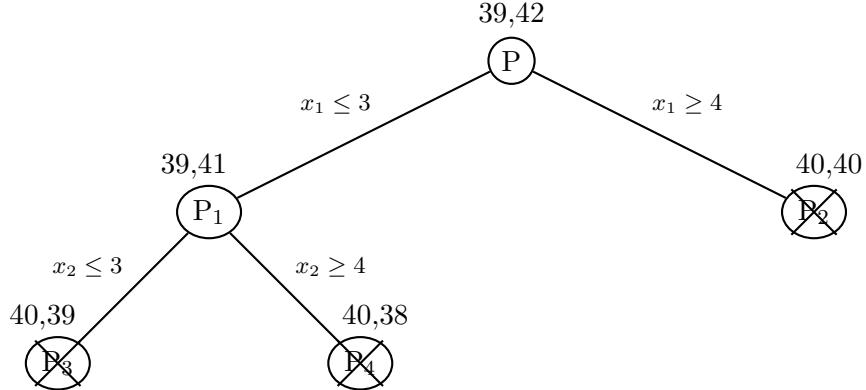
P₂: la soluzione ottima del rilassamento continuo è (2, 4) che è ammissibile e $v_S(P_2) = 46$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 46$ e chiudiamo il nodo.

P_3 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3)$ e $v_S(P_3) = 45 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P_4 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4, 2)$ e $v_S(P_4) = 44 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(2, 4)$ di valore 46.

Esercizio 5.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3.5, 3)$, quindi $v_S(P) = 42$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(3, 3)$, quindi $v_I(P) = 39$.

P_1 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3.33)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 41 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

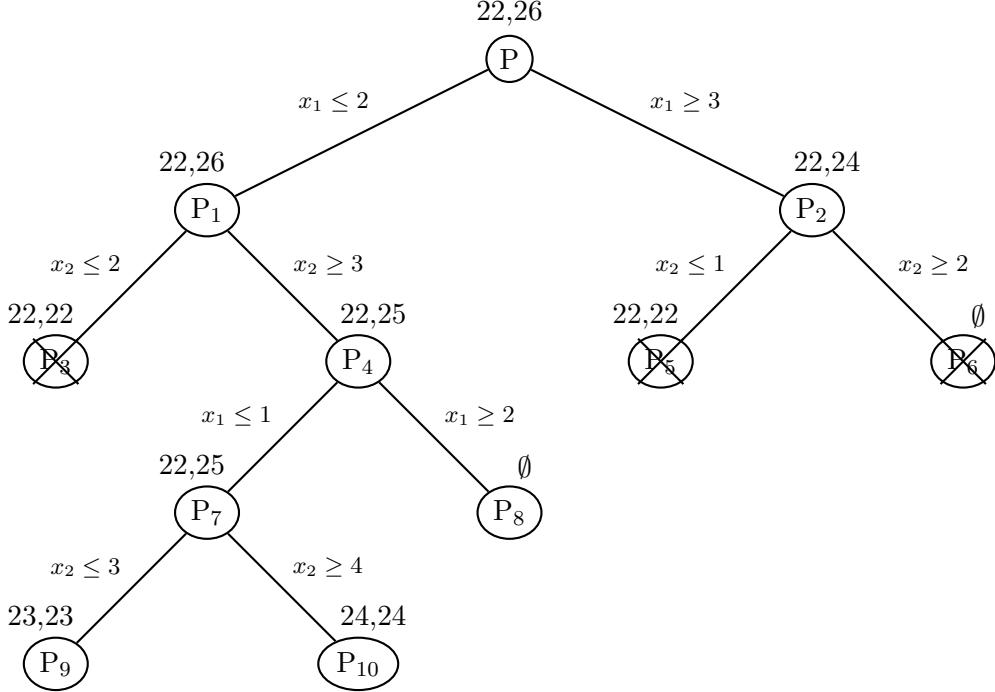
P_2 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4, 2)$ che è ammissibile e $v_S(P_2) = 40$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 40$ e chiudiamo il nodo.

P_3 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3)$ e $v_S(P_3) = 39 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P_4 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 4)$ e $v_S(P_4) = 38 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(4, 2)$ di valore 40.

Esercizio 6.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2.4, 2.4)$, quindi $v_S(P) = 26$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(2, 2)$, quindi $v_I(P) = 22$.
 P₁: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 2.66)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 26 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

P₂: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 1.5)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_2) = 24 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

P₃: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 2)$ e $v_S(P_3) = 22 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₄: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1.5, 3)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_4) = 25 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

P₅: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3.33, 1)$ e $v_S(P_5) = 22 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₆: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P₇: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 3.33)$ e $v_S(P_7) = 25 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

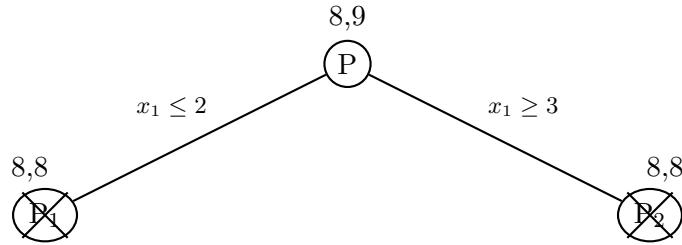
P₈: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P₉: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 3)$ e $v_S(P_9) = 23$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 23$ e chiudiamo il nodo.

P₁₀: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(0, 4)$ e $v_S(P_{10}) = 24$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 24$ e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(0, 4)$ di valore 24.

Esercizio 7.



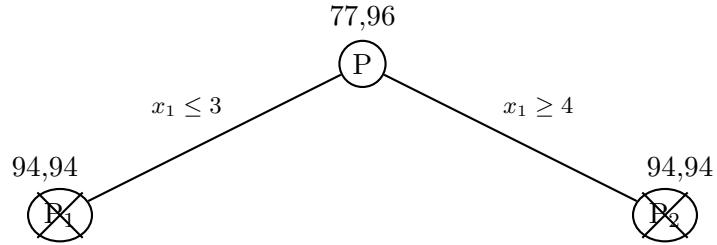
P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2.5, 3.5)$, quindi $v_S(P) = 9$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(2, 3)$, quindi $v_I(P) = 8$.

P_1 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 3.2)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 8 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P_2 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 2.8)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_2) = 8 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(2, 3)$ di valore 8.

Esercizio 8.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3.75, 1.25)$, quindi $v_S(P) = 96$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(3, 1)$, quindi $v_I(P) = 77$.
 P_1 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 2)$ che è a componenti intere e $v_S(P_1) = 94$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 94$ e chiudiamo il nodo.

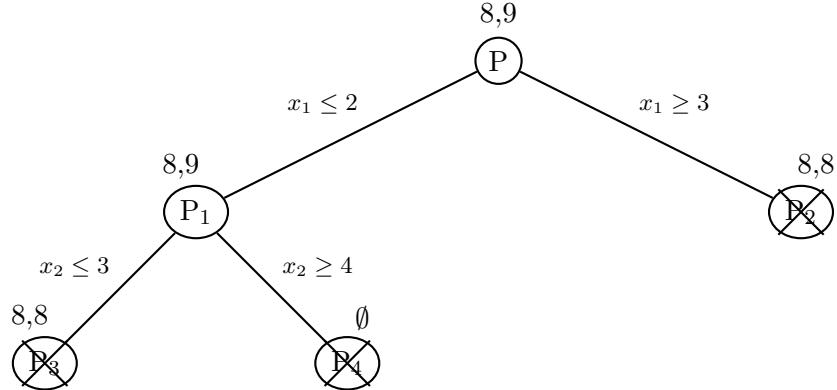
P_2 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4, 0.83)$ e $v_S(P_5) = 94 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(3, 2)$ di valore 94.

Esercizio 9.

P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(5, 0)$ ed è a componenti intere, quindi è la soluzione ottima del problema con valore 5.

Esercizio 10.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2.3, 3.78)$, quindi $v_S(P) = 9$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(2, 3)$, quindi $v_I(P) = 8$.
 P₁: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 3.6)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_1) = 9 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

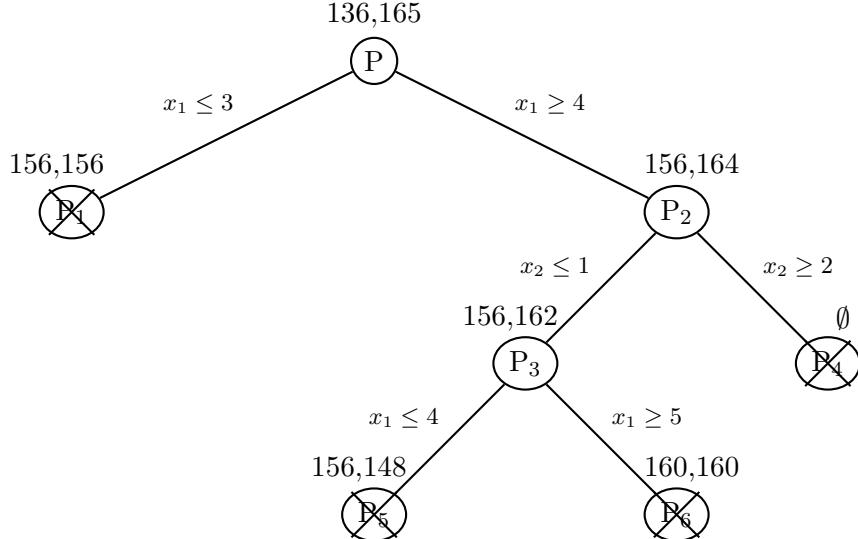
P₂: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 2.8)$ e $v_S(P_2) = 8 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₃: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2, 3)$ e $v_S(P_3) = 8 = v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P₄: non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(2, 3)$ di valore 8.

Esercizio 11.



P: la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3.75, 2.25)$, quindi $v_S(P) = 165$. Arrotondando la soluzione ottima del rilassamento si ottiene la soluzione ammissibile $(3, 2)$, quindi $v_I(P) = 136$.

P_1 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(3, 3)$ che è a componenti intere e $v_S(P_1) = 156$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 156$ e chiudiamo il nodo.

P_2 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4, 1.8)$ che non è a componenti intere e $v_S(P_2) = 164 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

P_3 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4.44, 1)$ e $v_S(P_3) = 162 > v_I(P)$, quindi il nodo rimane aperto.

P_4 : non esistono soluzioni ammissibili, quindi chiudiamo il nodo.

P_5 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(4, 1)$ e $v_S(P_5) = 148 < v_I(P)$, quindi chiudiamo il nodo.

P_6 : la soluzione ottima del rilassamento continuo è $(5, 0)$ che è a componenti intere e $v_S(P_6) = 160$, quindi aggiorniamo $v_I(P) = 160$ e chiudiamo il nodo.

La soluzione ottima del problema è $(5, 0)$ di valore 160.