

8 - Ottimizzazione nei sistemi stocastici

Mauro Passacantando

Dipartimento di Scienze Economico-Aziendali e Diritto per l'Economia
Università degli Studi di Milano-Bicocca
mauro.passacantando@unimib.it

Corso di Dinamica dei Sistemi Aziendali
Laurea Magistrale in Scienze Economico-Aziendali
Università degli Studi di Milano-Bicocca

Teoria delle decisioni

Finora abbiamo considerato problemi di ottimizzazione in cui i coefficienti numerici nella funzione obiettivo e nei vincoli fossero noti con certezza.

Vediamo ora alcuni strumenti per trattare problemi di ottimizzazione in condizione di incertezza.

La teoria delle decisioni riguarda i processi decisionali in cui il guadagno/costo non dipende solo dalla decisione presa, ma è influenzato anche dall'esito di eventi stocastici non controllabili da parte del decisore.

Esempio 1*

Un'impresa vuole realizzare un progetto di innovazione tecnologica selezionando il più vantaggioso tra tre diversi processi produttivi in alternativa (processi A, B e C). Supponiamo che i possibili eventi futuri relativi al volume della domanda siano riconducibili a soli tre livelli: domanda alta, media e bassa. Supponiamo inoltre che le probabilità di occorrenza dei tre possibili livelli di domanda siano pari a 0.4 (domanda alta), 0.5 (domanda media) e 0.1 (domanda bassa). La tabella seguente mostra i guadagni (espressi in migliaia di euro) per ogni possibile coppia decisione-evento futuro:

Decisioni	Eventi futuri		
	Domanda alta	Domanda media	Domanda bassa
Processo A	600	350	200
Processo B	540	390	250
Processo C	490	375	300

Qual è il processo produttivo più conveniente per l'impresa?

*Tratto da: C. Vercellis, Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni, McGraw-Hill, 2008.

Teoria delle decisioni

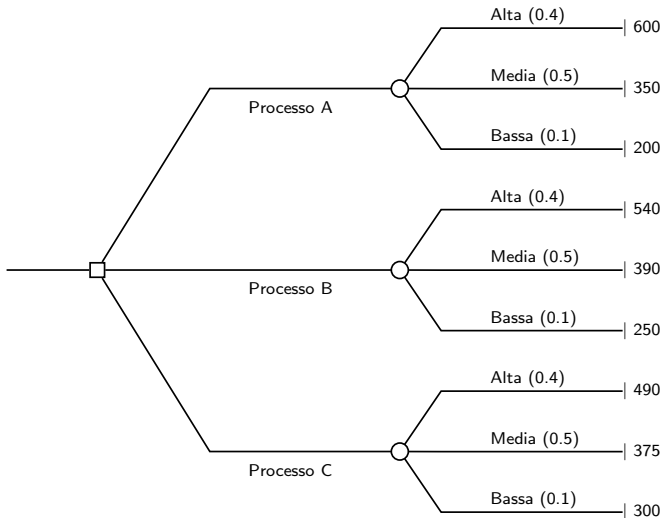
Un'analisi di teoria delle decisioni è composta da quattro fasi principali:

- ▶ **Identificazione delle alternative.** Determinare l'insieme $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_m\}$ di tutte le possibili decisioni alternative che si presentano al decisore.
- ▶ **Identificazione degli eventi futuri.** Determinare tutti i possibili eventi futuri (*stati di natura*) che possono influenzare gli effetti delle diverse decisioni. Supponiamo che gli stati di natura possibili S_1, \dots, S_n costituiscano un insieme di eventi esaustivi e mutuamente esclusivi e che sia nota la probabilità di occorrenza $P(S_j)$ di ogni stato di natura S_j .
- ▶ **Calcolo dei guadagni/costi.** Per ogni coppia (D_i, S_j) (decisione, stato di natura) calcoliamo il guadagno/costo $v(D_i, S_j)$ associato alla decisione D_i se nel futuro si verifica lo stato di natura S_j .
- ▶ **Selezione della decisione ottimale.** Definire una funzione di valutazione $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni decisione associa un valore numerico indipendente dagli stati di natura. Ad esempio, f può essere uguale al valore atteso monetario:

$$\text{VAM}(D_i) = \sum_{j=1}^n P(S_j)v(D_i, S_j), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Esempio 1 - albero decisionale

Rappresentiamo le decisioni ed i possibili eventi futuri nel seguente albero decisionale:



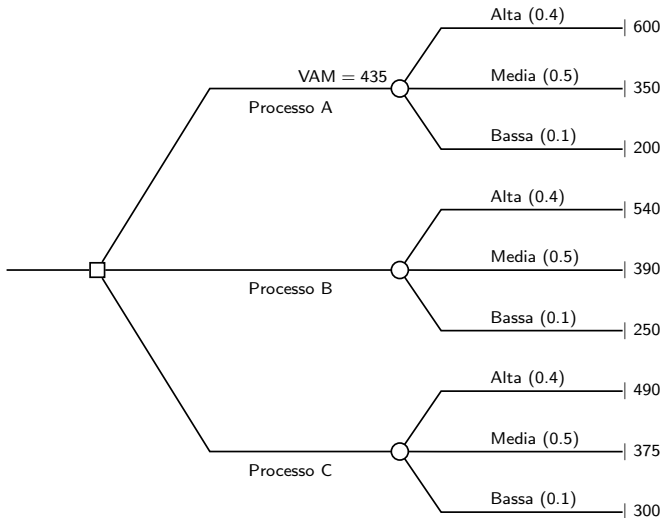
□ = nodo decisione

○ = nodo evento

| = nodo terminale

Esempio 1 - albero decisionale

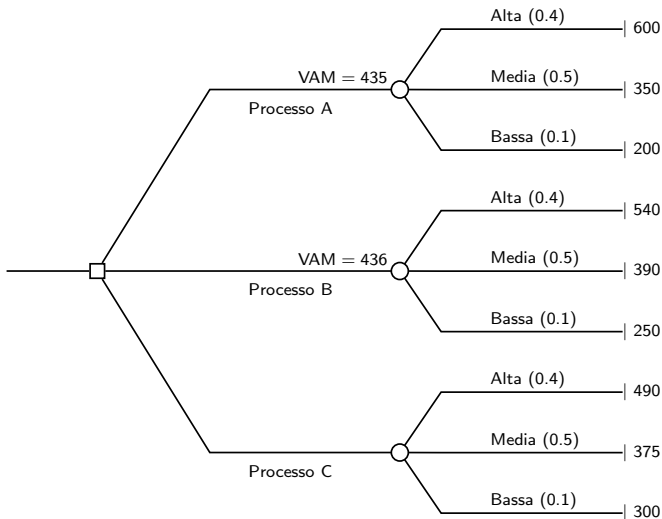
Rappresentiamo le decisioni ed i possibili eventi futuri nel seguente albero decisionale:



$$\text{VAM}(\text{Processo A}) = 0.4 \cdot 600 + 0.5 \cdot 350 + 0.1 \cdot 200 = 435$$

Esempio 1 - albero decisionale

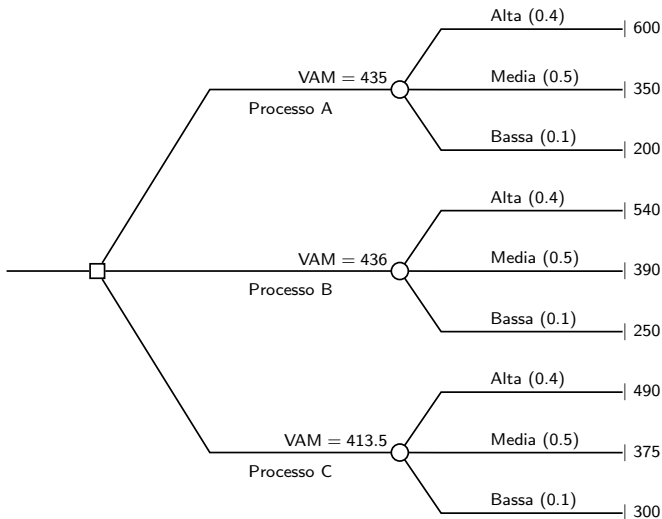
Rappresentiamo le decisioni ed i possibili eventi futuri nel seguente albero decisionale:



$$\text{VAM}(\text{Processo B}) = 0.4 \cdot 540 + 0.5 \cdot 390 + 0.1 \cdot 250 = 436$$

Esempio 1 - albero decisionale

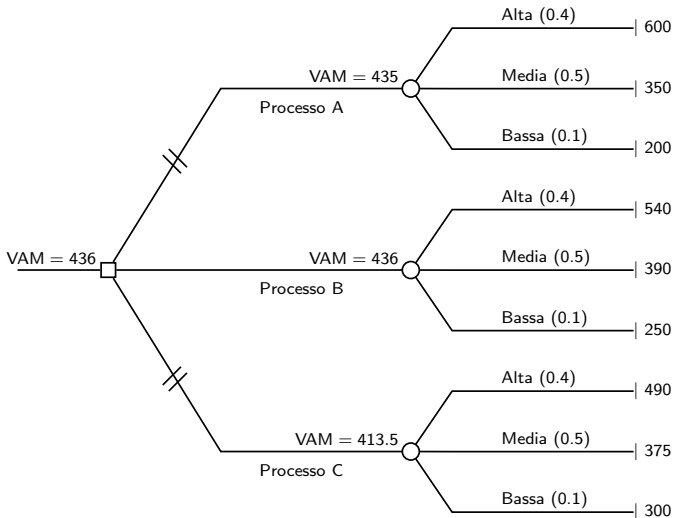
Rappresentiamo le decisioni ed i possibili eventi futuri nel seguente albero decisionale:



$$\text{VAM}(\text{Processo C}) = 0.4 \cdot 490 + 0.5 \cdot 375 + 0.1 \cdot 300 = 413.5$$

Esempio 1 - albero decisionale

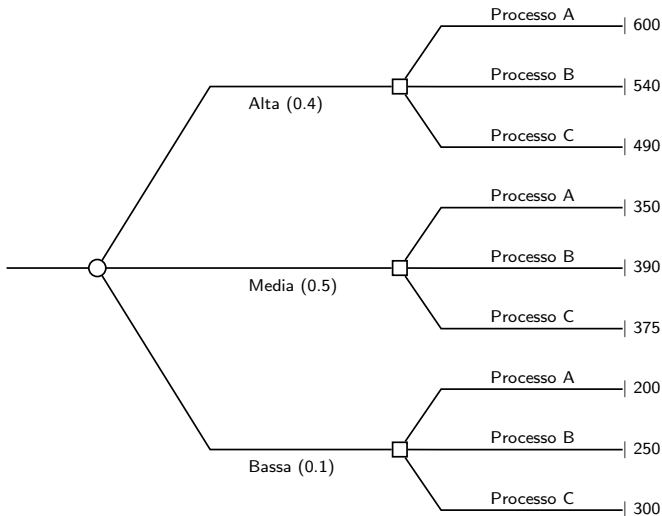
Rappresentiamo le decisioni ed i possibili eventi futuri nel seguente albero decisionale:



Il processo B fornisce il VAM massimo.

Valore dell'informazione perfetta

Quanto siamo disposti a pagare per sapere con certezza quale evento si realizzerà in futuro?



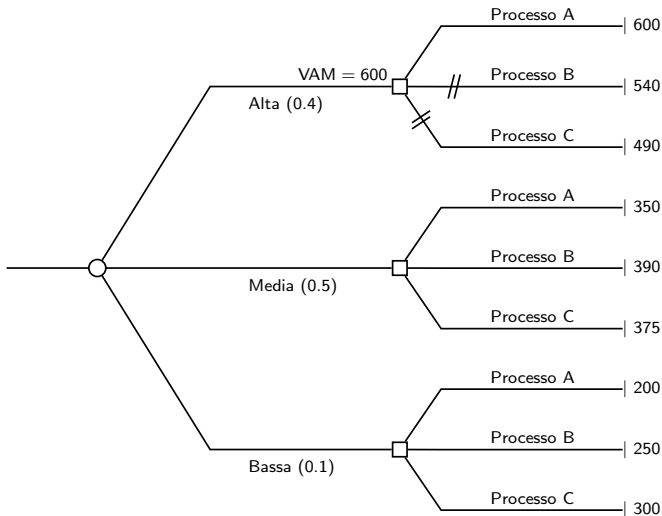
□ = nodo decisione

○ = nodo evento

| = nodo terminale

Valore dell'informazione perfetta

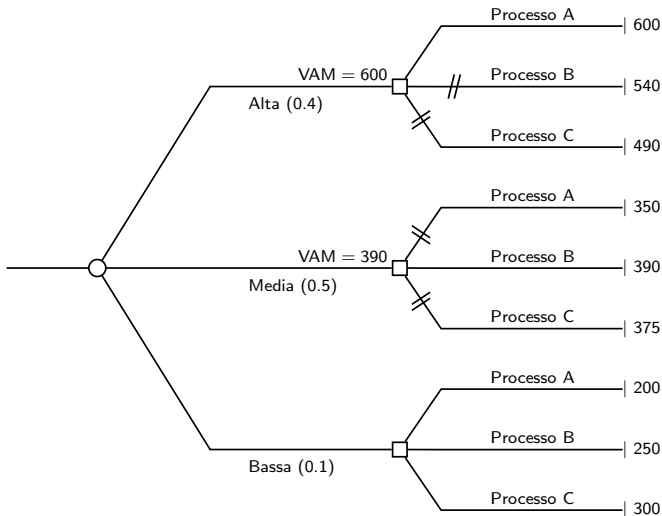
Quanto siamo disposti a pagare per sapere con certezza quale evento si realizzerà in futuro?



Nel caso di alta domanda: $VAM = \max\{600, 540, 490\} = 600$

Valore dell'informazione perfetta

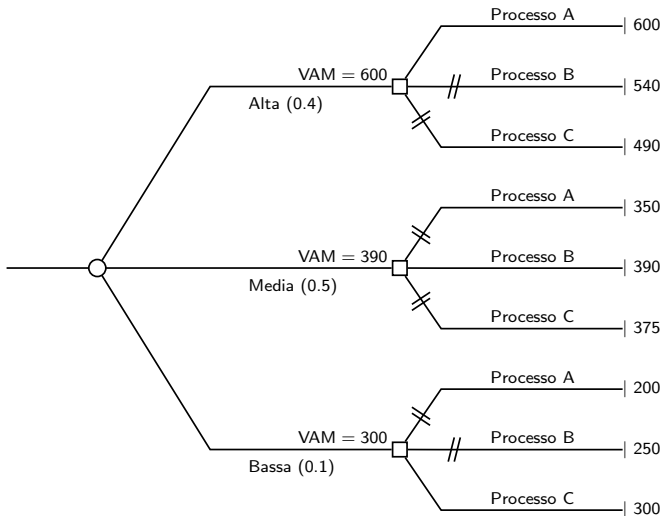
Quanto siamo disposti a pagare per sapere con certezza quale evento si realizzerà in futuro?



Nel caso di media domanda: $VAM = \max\{350, 390, 375\} = 390$

Valore dell'informazione perfetta

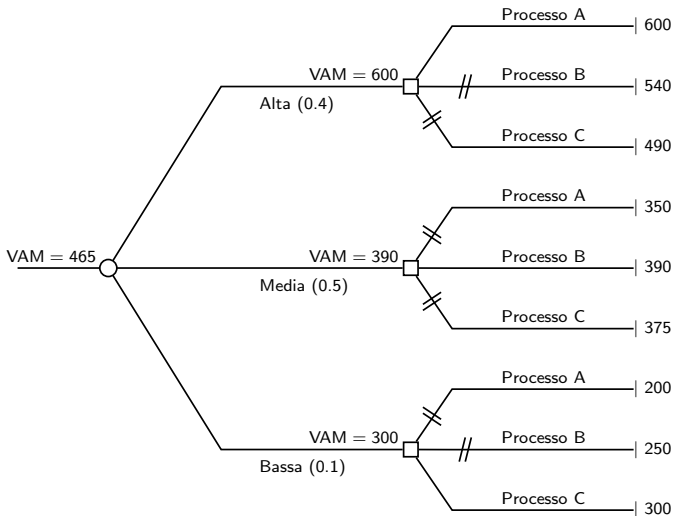
Quanto siamo disposti a pagare per sapere con certezza quale evento si realizzerà in futuro?



Nel caso di bassa domanda: $VAM = \max\{200, 250, 300\} = 300$

Valore dell'informazione perfetta

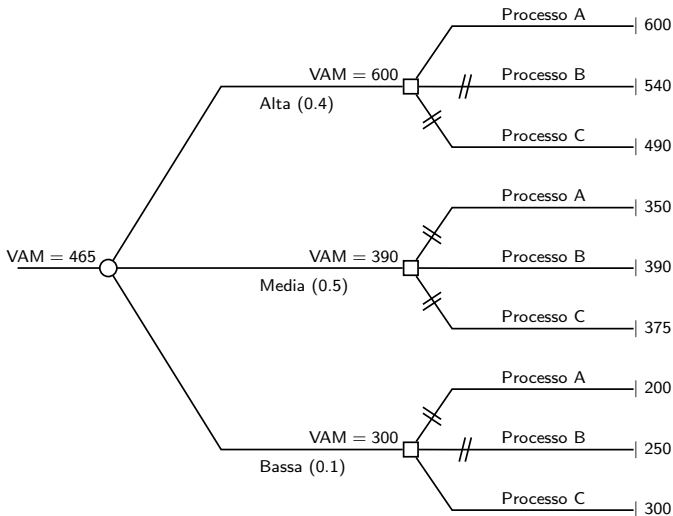
Quanto siamo disposti a pagare per sapere con certezza quale evento si realizzerà in futuro?



$$\text{Valore atteso monetario con informazione perfetta} = 0.4 \cdot 600 + 0.5 \cdot 390 + 0.1 \cdot 300 = 465$$

Valore dell'informazione perfetta

Quanto siamo disposti a pagare per sapere con certezza quale evento si realizzerà in futuro?



Valore atteso dell'informazione perfetta = $465 - 436 = 29$

Esempio 1 (segue)

Supponiamo che l'impresa abbia la possibilità, in una prima fase, di commissionare ad una società di consulenza una ricerca di mercato (al costo di 5000 euro) e poi, sulla base dei risultati ottenuti, decidere la tecnologia da adottare. Il processo decisionale ha quindi una struttura sequenziale composta da due fasi:

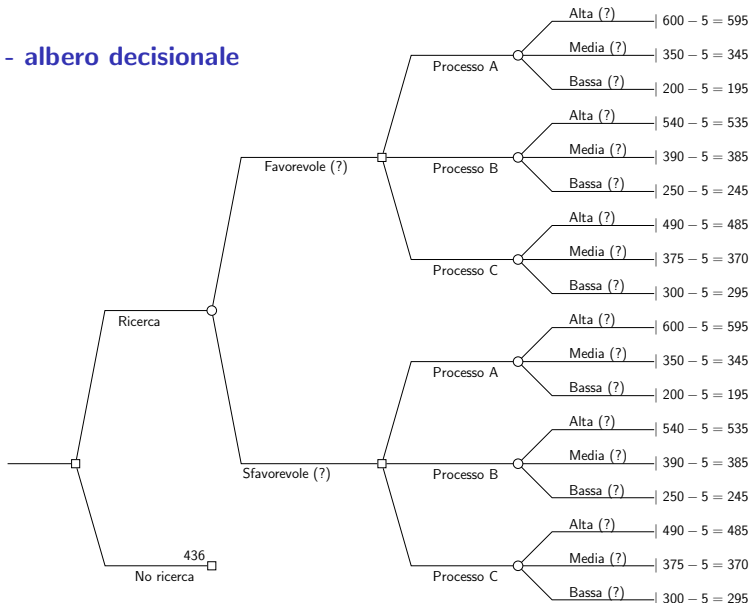
1. decidere se commissionare o no la ricerca di mercato;
2. decidere quale tipo di tecnologia adottare.

Supponiamo che la ricerca di mercato possa avere solo due esiti possibili, corrispondenti ad una situazione di mercato favorevole o sfavorevole. La seguente tabella mostra quali sono le probabilità degli esiti della ricerca di mercato condizionate agli stati di natura possibili:

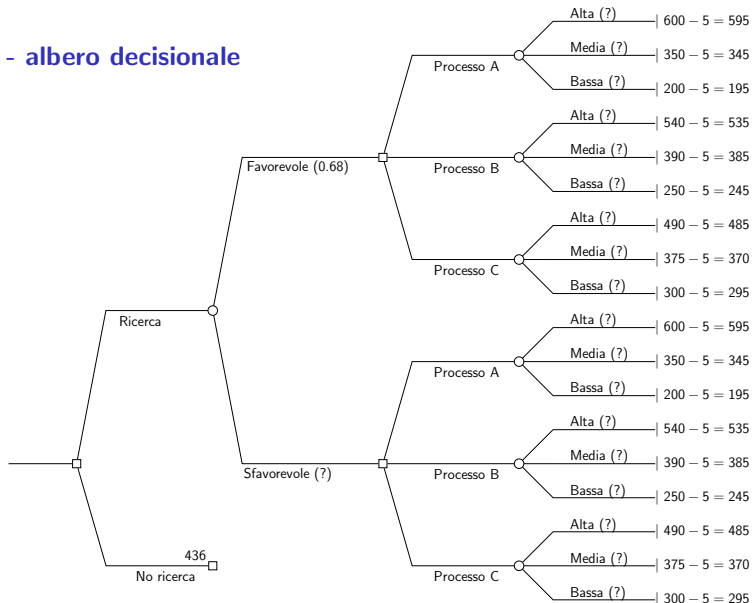
Esiti ricerca mercato	Domanda alta	Domanda media	Domanda bassa
Favorevole	0.9	0.6	0.2
Sfavorevole	0.1	0.4	0.8

Quali decisioni dovrebbe prendere l'impresa?

Esempio 1 - albero decisionale

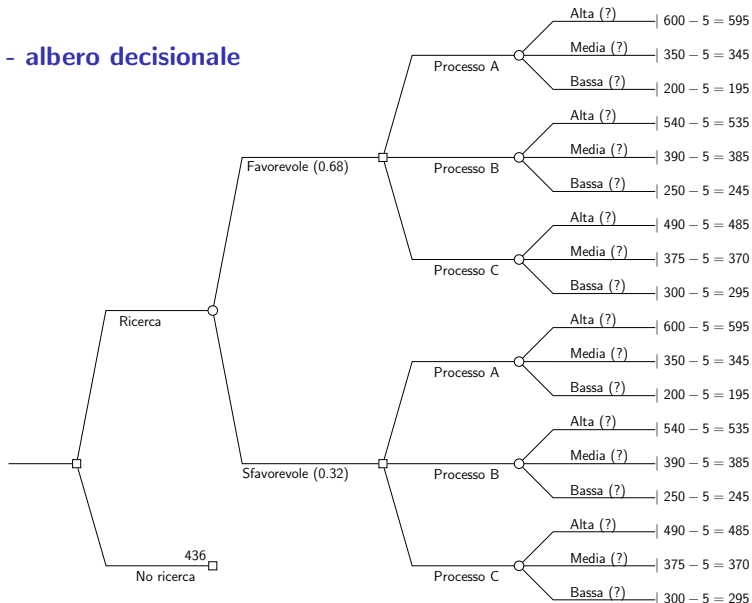


Esempio 1 - albero decisionale



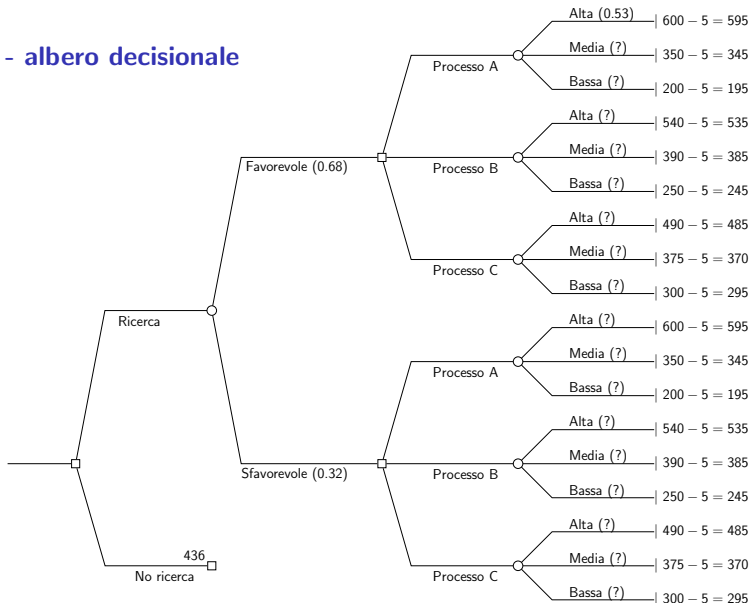
$$\begin{aligned}
 P(\text{Favorevole}) &= P(\text{Alta})P(\text{Favorevole}|\text{Alta}) + P(\text{Media})P(\text{Favorevole}|\text{Media}) + P(\text{Bassa})P(\text{Favorevole}|\text{Bassa}) \\
 &= 0.4 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.68
 \end{aligned}$$

Esempio 1 - albero decisionale



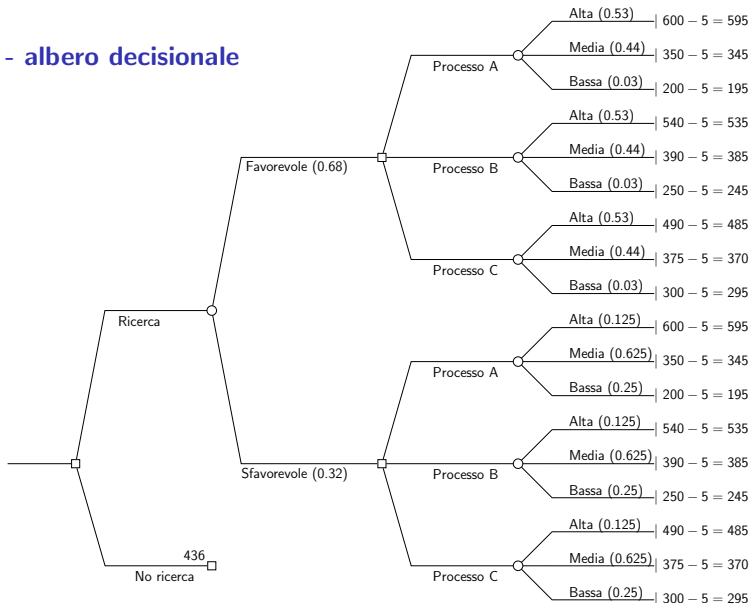
$$P(\text{Sfavorevole}) = P(\text{Alta})P(\text{Sfavorevole}|\text{Alta}) + P(\text{Media})P(\text{Sfavorevole}|\text{Media}) + P(\text{Bassa})P(\text{Sfavorevole}|\text{Bassa}) = 0.32$$

Esempio 1 - albero decisionale

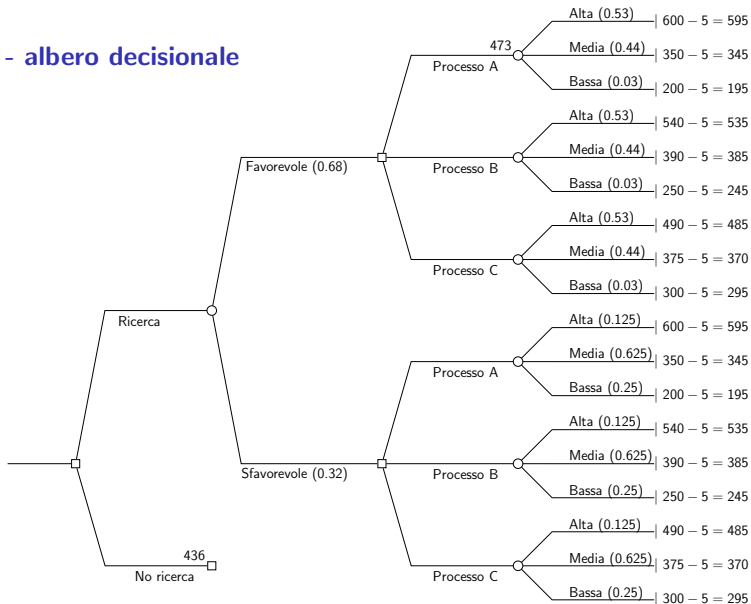


Teorema di Bayes:
$$P(\text{Alta}|\text{Favorevole}) = \frac{P(\text{Alta})P(\text{Favorevole}|\text{Alta})}{P(\text{Favorevole})} = \frac{0.4 \cdot 0.9}{0.68} = 0.53$$

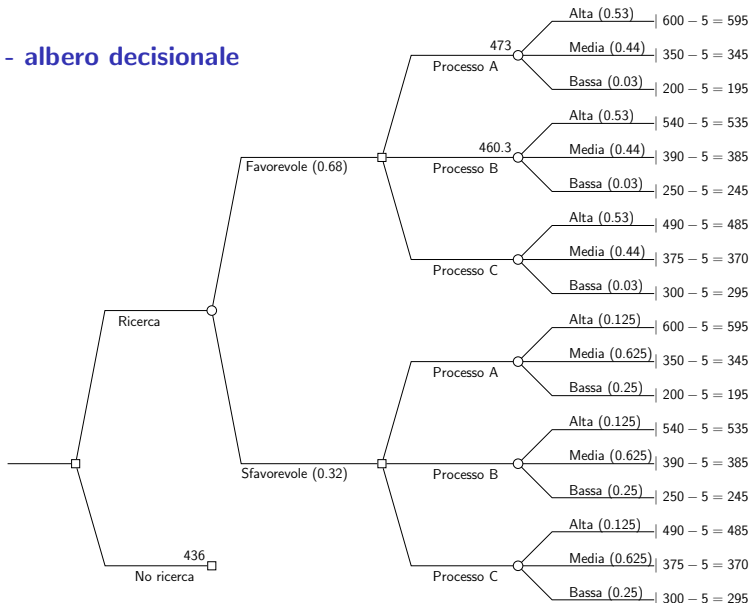
Esempio 1 - albero decisionale



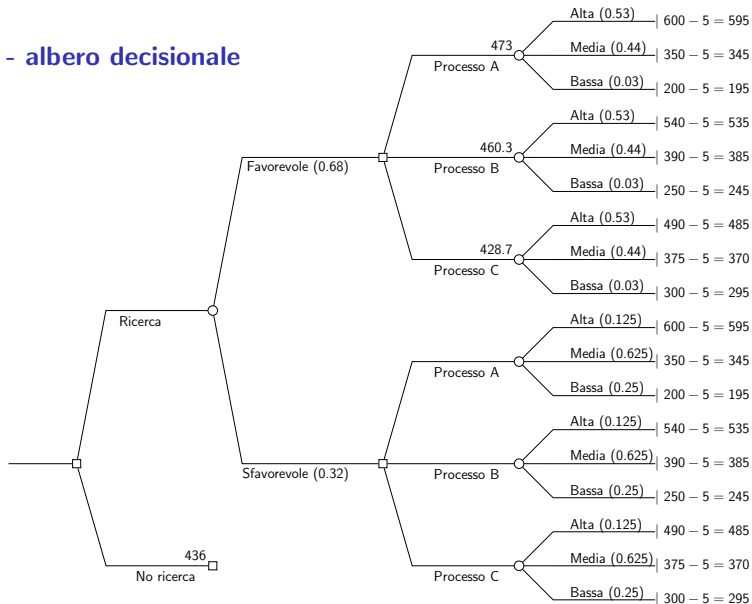
Esempio 1 - albero decisionale



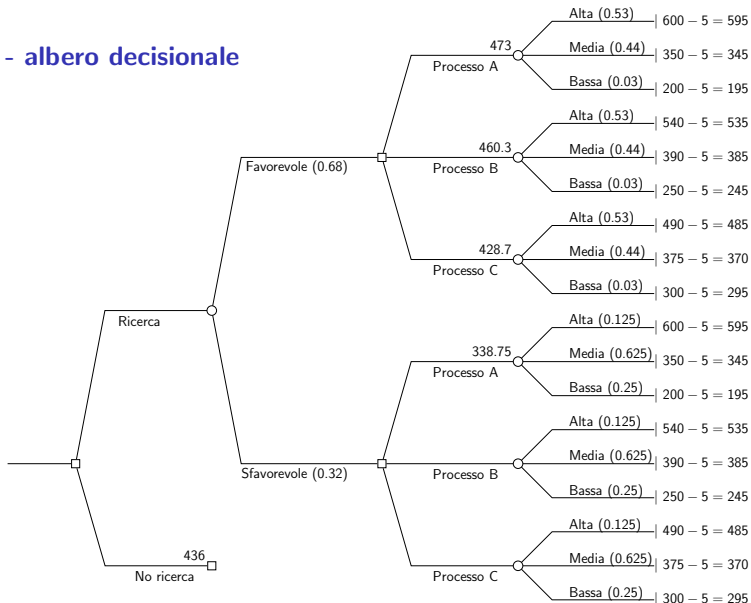
Esempio 1 - albero decisionale



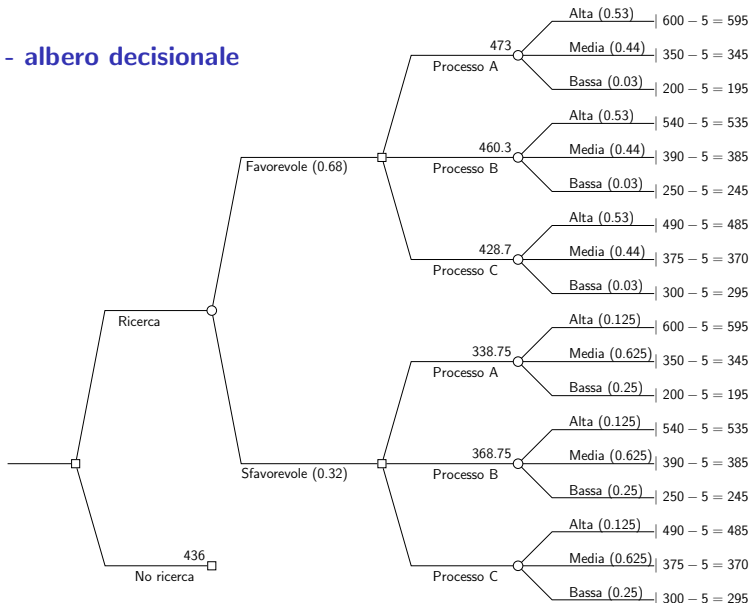
Esempio 1 - albero decisionale



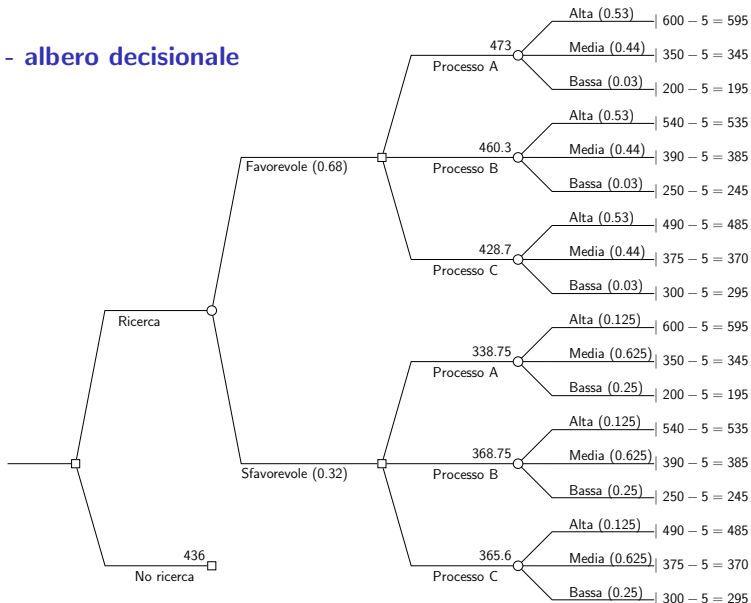
Esempio 1 - albero decisionale



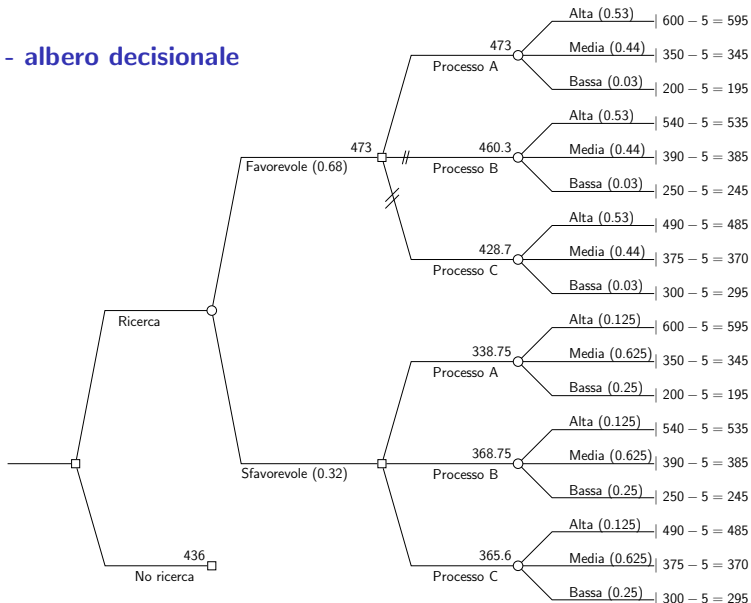
Esempio 1 - albero decisionale



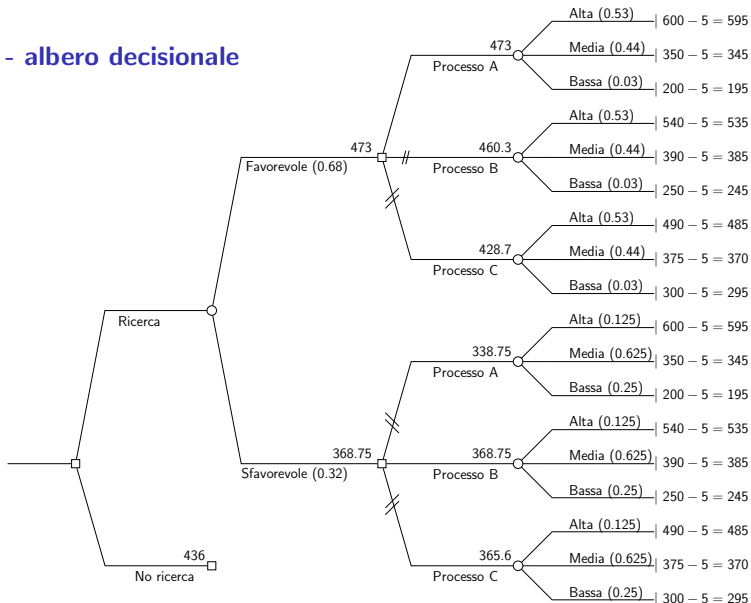
Esempio 1 - albero decisionale



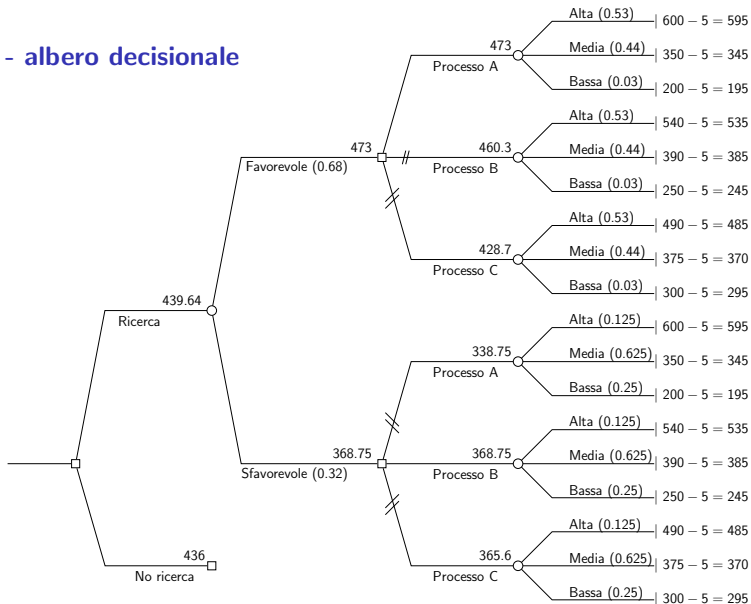
Esempio 1 - albero decisionale



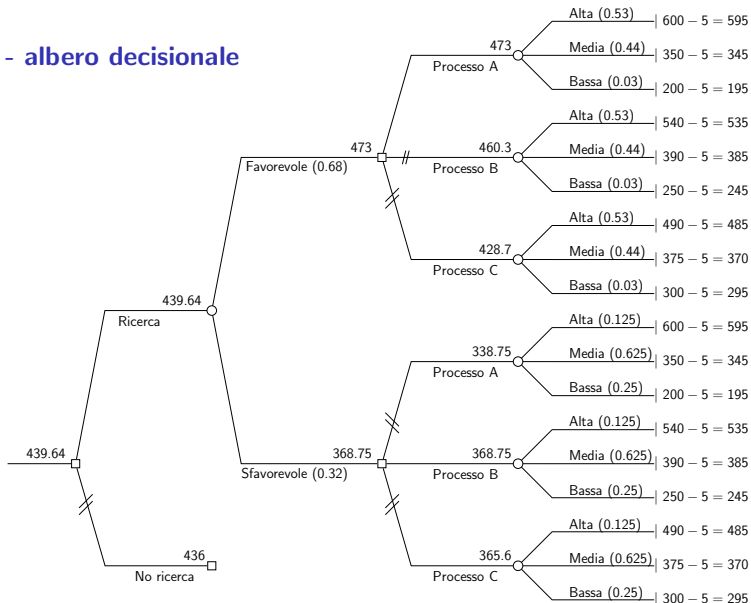
Esempio 1 - albero decisionale



Esempio 1 - albero decisionale



Esempio 1 - albero decisionale



Conviene commissionare la ricerca di mercato: in caso di esito favorevole, scegliere il processo A; altrimenti scegliere il processo B.

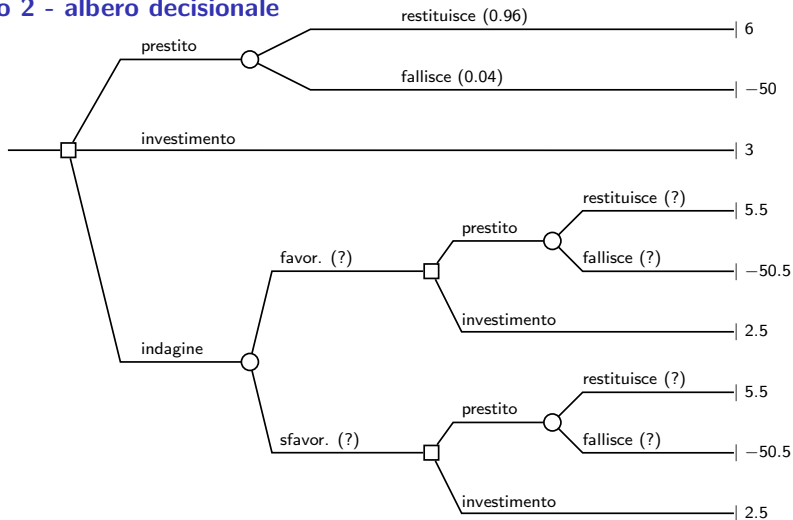
Valore atteso dell'informazione fornita dalla ricerca di mercato = $439.64 - 436 + 5 = 8.64$

Esempio 2

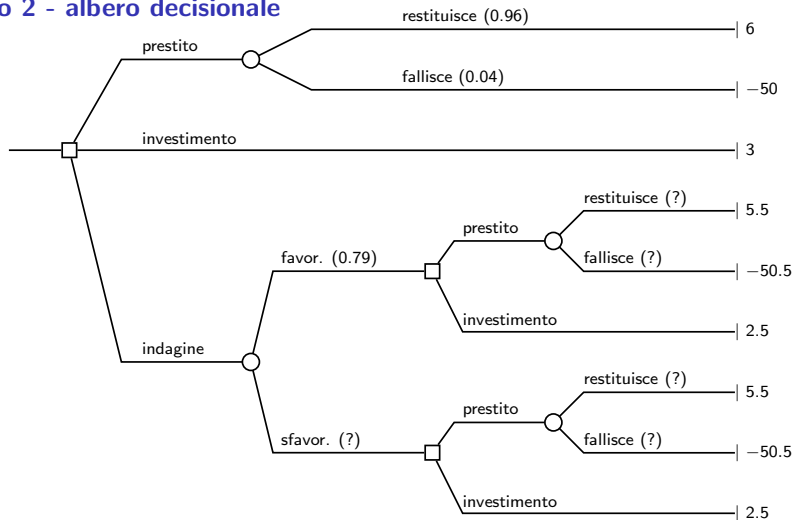
Un cliente chiede ad una banca un prestito di 50.000 euro per un anno. La banca ha le seguenti tre alternative:

1. può concedere il prestito al cliente al tasso del 12%. La banca sa che la probabilità che il cliente non restituisca il prestito è di $1/25$ ed in tal caso la banca perderà l'intero importo prestato;
 2. può non concedere il prestito al cliente ed investire lo stesso importo in obbligazioni che rendono il 6% senza rischio;
 3. può prima indagare sulla storia creditizia del cliente, al costo di 500 euro, e poi decidere se concedere il prestito oppure no. La storia passata indica che, nel caso di un cliente che restituisce il prestito, la probabilità che avesse una storia favorevole è di $78/96$, mentre, nel caso di un cliente che non restituisce il prestito, la probabilità che avesse una storia favorevole è del 25%.
- a) Quale decisione dovrebbe prendere la banca per massimizzare il suo profitto atteso?
- b) Calcolare il valore atteso dell'informazione ottenuta sulla storia creditizia del cliente.

Esempio 2 - albero decisionale

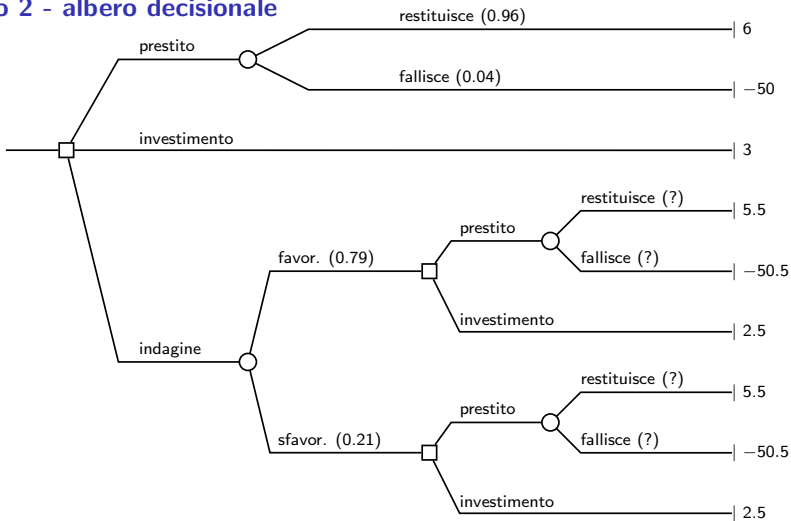


Esempio 2 - albero decisionale



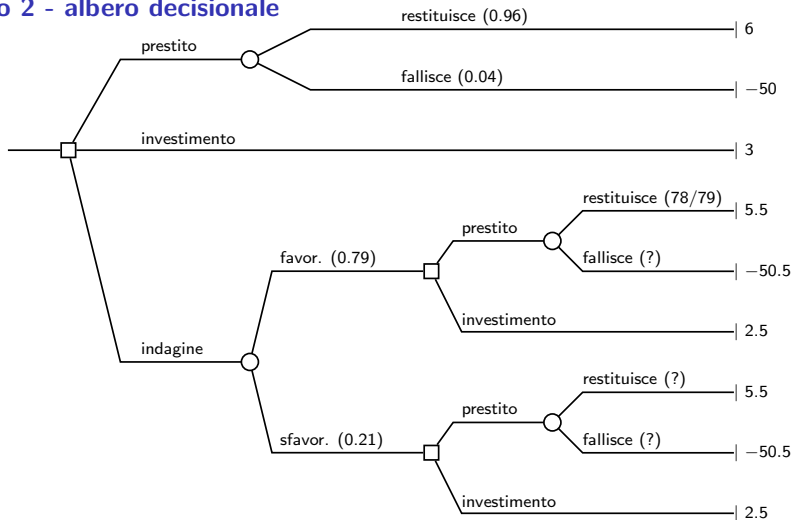
$$P(\text{favor.}) = P(\text{restituisce})P(\text{favor.}|\text{restituisce}) + P(\text{fallisce})P(\text{favor.}|\text{fallisce}) = \frac{24}{25} \cdot \frac{78}{96} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{4} = 0.79$$

Esempio 2 - albero decisionale



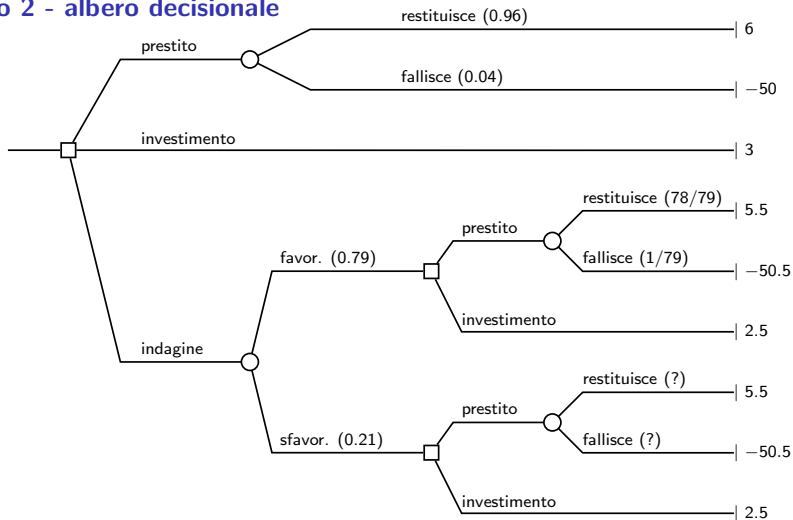
$$P(\text{sfavorevole}) = 1 - P(\text{favorevole}) = 0.21$$

Esempio 2 - albero decisionale



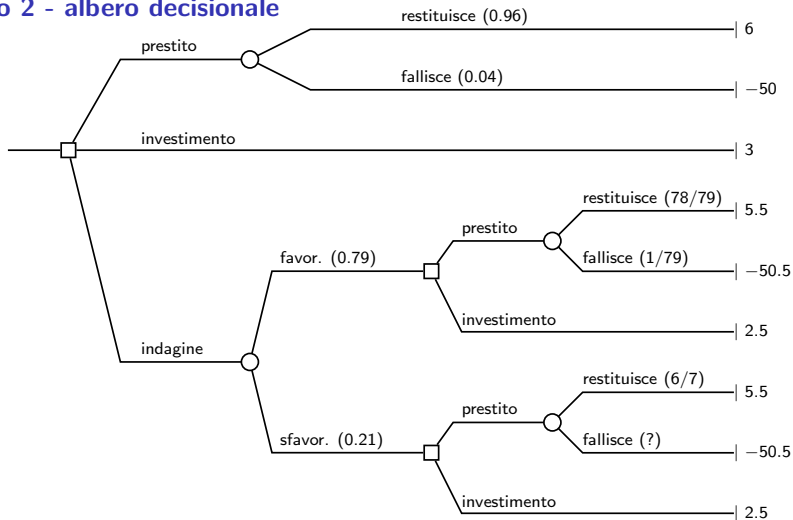
$$P(\text{restituisce}|\text{favor.}) = \frac{P(\text{favor.}|\text{restituisce})P(\text{restituisce})}{P(\text{favor.})} = \frac{\frac{78}{96} \cdot \frac{24}{25}}{\frac{79}{100}} = \frac{78}{79}$$

Esempio 2 - albero decisionale



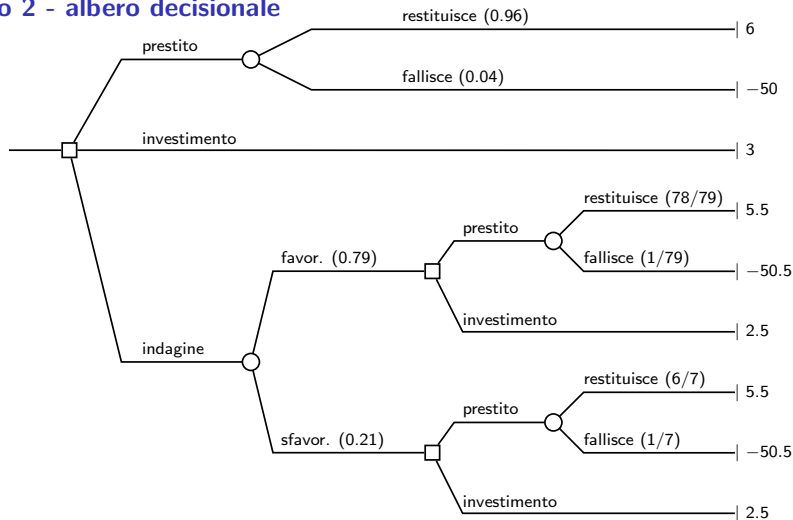
$$P(\text{fallisce}|\text{favor.}) = 1 - P(\text{restituisce}|\text{favor.}) = \frac{1}{79}$$

Esempio 2 - albero decisionale



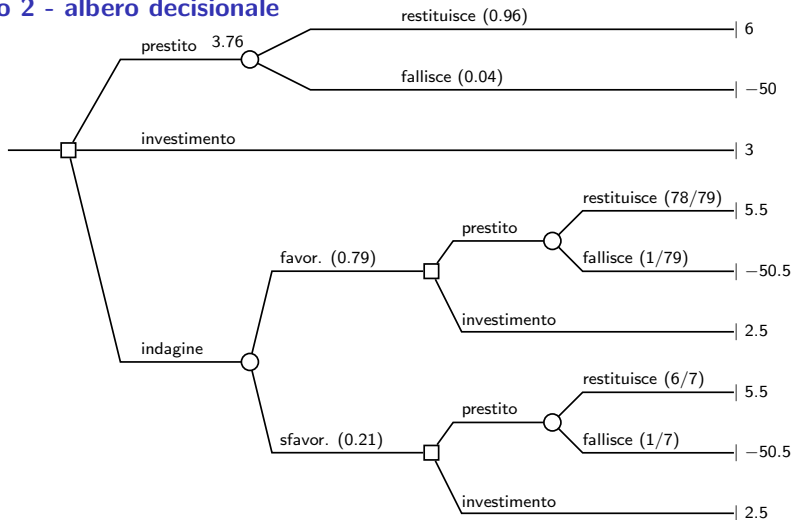
$$P(\text{restituisce}|\text{sfavor.}) = \frac{P(\text{sfavor.}|\text{restituisce})P(\text{restituisce})}{P(\text{sfavor.})} = \frac{\frac{18}{96} \cdot \frac{24}{25}}{\frac{21}{100}} = \frac{6}{7}$$

Esempio 2 - albero decisionale

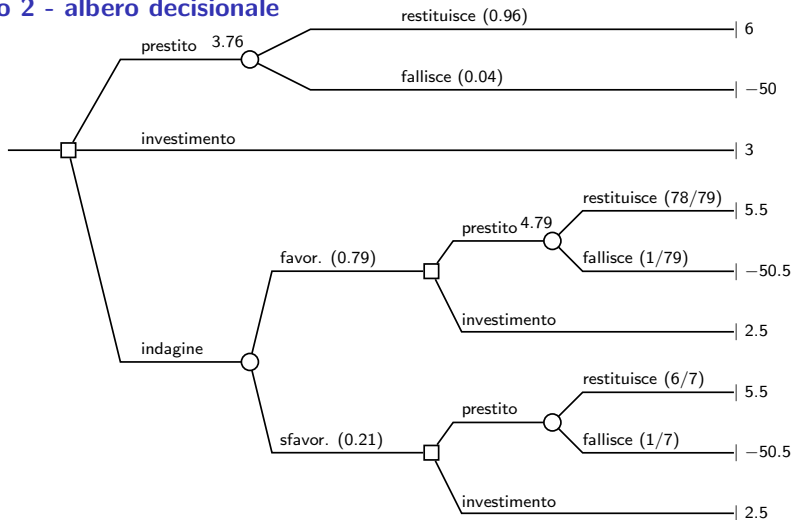


$$P(\text{fallisce}|\text{sfavor.}) = 1 - P(\text{restituisce}|\text{sfavor.}) = \frac{1}{7}$$

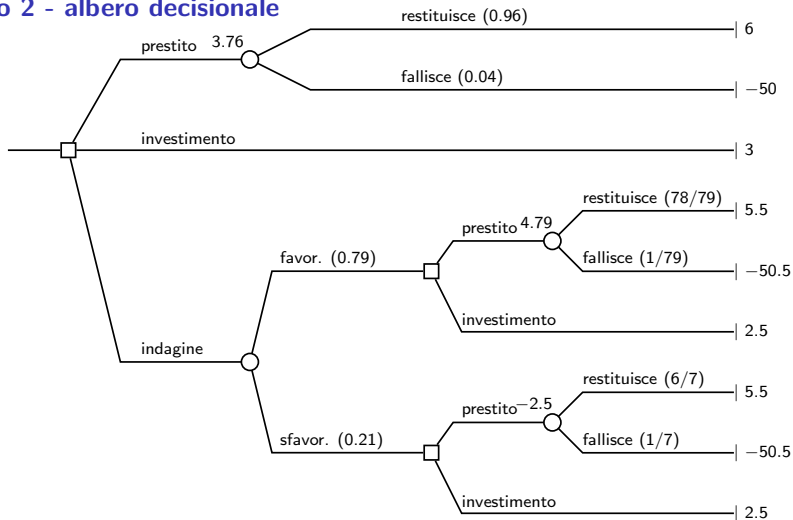
Esempio 2 - albero decisionale



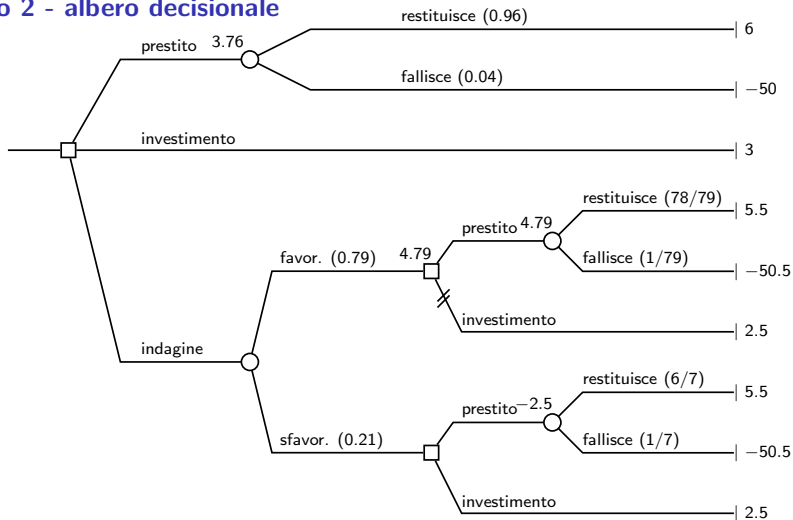
Esempio 2 - albero decisionale



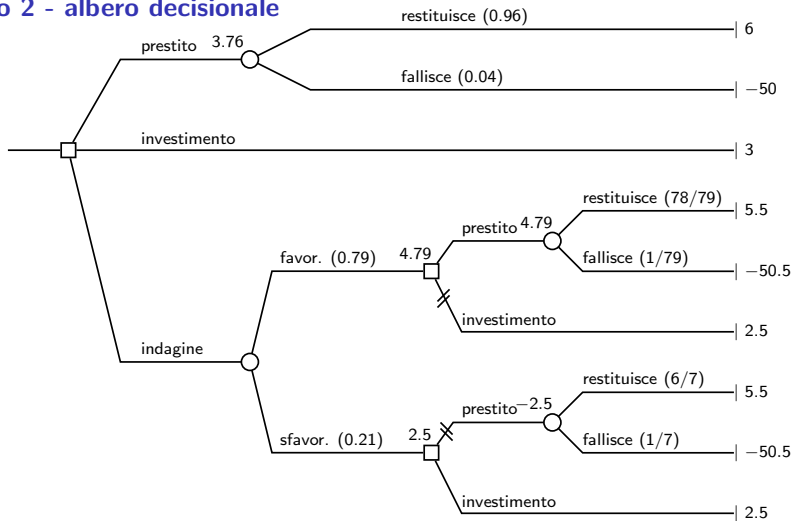
Esempio 2 - albero decisionale



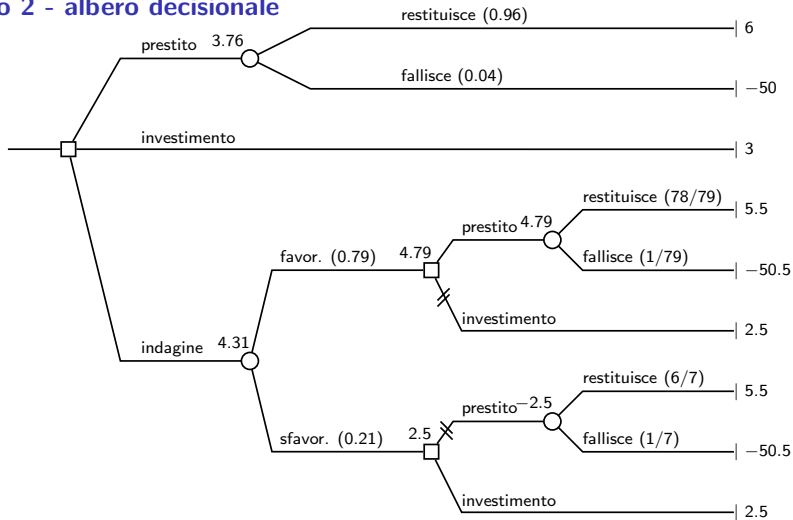
Esempio 2 - albero decisionale



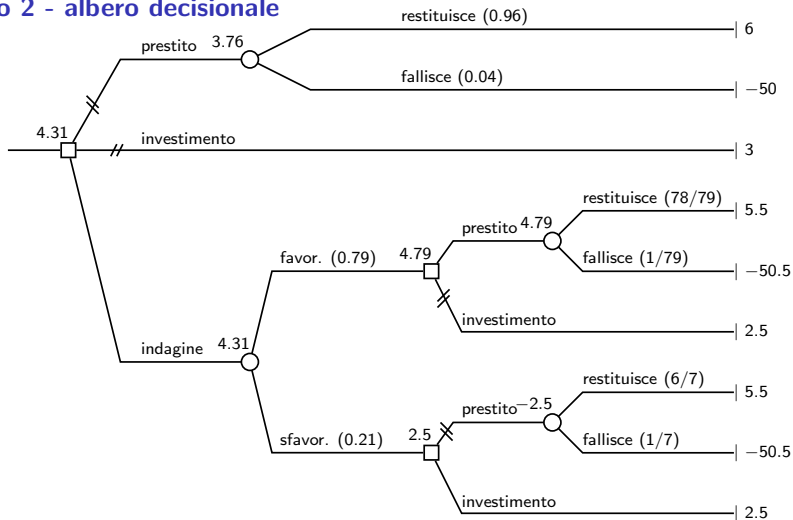
Esempio 2 - albero decisionale



Esempio 2 - albero decisionale



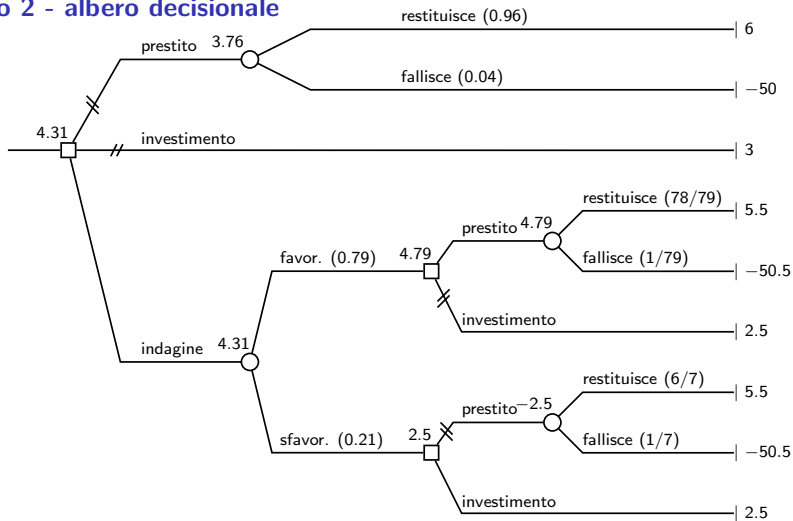
Esempio 2 - albero decisionale



La scelta migliore è fare prima l'indagine sul cliente:

se ha una storia favorevole, allora conviene concedere il prestito, altrimenti conviene investire

Esempio 2 - albero decisionale



Valore atteso dell'informazione sulla storia creditizia del cliente = $4.31 - 3.76 + 0.5 = 1.05$