

1 Campi, campi ordinati e campi ordinati completi

Esercizio 1. Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ un campo.

- (i) Si deduca, usando la definizione di campo, che, se $x, y \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, allora $\frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$.
- (ii) Si deduca, usando la definizione di campo, che, se $x, y \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, allora $\frac{1}{x \cdot y} \cdot (x + y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Suggerimento. (i) si usino le proprietà associative e commutativa della moltiplicazione. (ii) si usi il punto (i) e poi si applichi la proprietà distributiva.

Esercizio 2. Sia

$$\mathbb{F} = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \mid P(x), Q(x) \text{ polinomi a coefficienti } \textbf{interi} \text{ con } Q(x) \neq 0 \right\}.$$

- (i) Verificare che le normali definizioni di somma e prodotto rendono $\mathbb{F}$ un campo.
- (ii) Determinare lo zero e l'unità di $\mathbb{F}$.
- (iii) Determinare l'opposto e l'inverso in $\mathbb{F}$ di $g = \frac{x^3 - 5x + 6}{4x^2 - 1}$.

Esercizio 3. Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato.

- (i) Si deduca dalla definizione di campo ordinato la regola dei segni, cioè: se $x > 0 \wedge y > 0$ o $x < 0 \wedge y < 0$ allora $x \cdot y > 0$ mentre se $x > 0 \wedge y < 0$ allora $x \cdot y < 0$.
- (ii) Si osservi che la regola dei segni implica $x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.
- (iii) Usando il risultato precedente si deduca che $1 > 0$, cioè che l'unità è sempre maggiore dello zero.
- (iv) Si deduca che se $x > 0$ allora $\frac{1}{x} > 0$.
- (v) Si deduca dalle proprietà precedenti e dalla definizione di campo ordinato che, se $x \geq y > 0$, allora $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$.

Suggerimento. (i) se $x > 0$ si possono moltiplicare entrambi i membri di $y > 0$ per x senza cambiare la disuguaglianza e si ha $x \cdot y > x \cdot 0 = 0$, gli altri casi sono simili. (iii) per assurdo si supponga $1 < 0$ e si determini il segno di $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$. (iv) si osservi che $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot x$. (v) si moltiplichi la disuguaglianza per $\frac{1}{x \cdot y}$.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ il campo introdotto nell'Esercizio 2. Per ogni $g \in \mathbb{F}$ dato da

$$g = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}, \text{ con } a_n, b_m \neq 0$$

poniamo $g > 0$ se e solo se $\frac{a_n}{b_m} > 0$, inoltre dati $g, f \in \mathbb{F}$ poniamo $f < g$ se e solo se $g - f > 0$ in base alla definizione precedente. Infine poniamo $f \leq g$ se e solo se $f < g$ oppure $f = g$. Verificare che $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato.

Suggerimento. La proprietà riflessiva è immediata. Usando la definizione mostrare prima che se $f > 0$ e $g > 0$ allora $f + g > 0$. Siano $f, g \in \mathbb{F}$ tali che $f \leq g \wedge g \leq f$. Se $f \neq g$ allora $g - f > 0 \wedge f - g > 0$ per cui sommando $0 = (g - f) + (f - g) > 0$ assurdo. La proprietà transitiva è dimostrata in modo analogo. Per la compatibilità con le operazioni di campo occorre prima dimostrare, usando la definizione, che se $f > 0 \wedge g > 0$ allora $f \cdot g > 0$.

Esercizio 5. Si consideri la seguente dimostrazione sbagliata della proposizione falsa "l'equazione $x^2 = 4$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$ ":

Per assurdo, se esistessero $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ primi tra loro tali che

$$4 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2},$$

allora si avrebbe $p^2 = 4q^2$. Quindi p^2 sarebbe un multiplo di 4 da cui seguirebbe che p è un multiplo di 4, cioè esisterebbe $k \in \mathbb{Z}$ tale che $p = 4k$. Quindi $16k^2 = (4k)^2 = p^2 = 4q^2$, da cui $q^2 = 4k^2$. Quindi q^2 sarebbe un multiplo di 4 e quindi anche q sarebbe un multiplo di 4; assurdo, essendo p e q primi tra loro.

Che cosa c'è di sbagliato nella dimostrazione scritta sopra?

Esercizio 6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Quali delle seguenti condizioni sono sufficienti perché $\sup E = 5$?

(a) $\forall x \in E \quad x < 5$;

(e) $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leq 30\}$;

(b) $\forall x \in E \quad x \leq 5$;

(f) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \mid 5 < x + \varepsilon$;

(c) $\max E = 5$;

(g) $\forall x \in E \quad x < 5 \quad e \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \mid 5 < x + \varepsilon$;

(d) $5 \notin E$;

(h) $E = \{5\}$.

(ii) Quali delle seguenti condizioni sono necessarie perché $\sup E = 5$?

(a) $\exists x \in E \mid x < 5$;

(e) $\forall x \in E \quad x < 5$;

(b) $\max E$ esiste;

(f) $\forall x \in E \quad x \leq 5$;

(c) $5 \in E$;

(g) $\exists x \in E \mid x \geq 3$;

(d) $5 \notin E$;

(h) $\exists x \in E \mid x > 2$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}$, si stabilisca se ciascuno dei seguenti insiemi è inferiormente limitato o superiormente limitato e se ne determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore.

$A_1 = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

$A_5 = \left\{\frac{\cos(n\pi)}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$;

$A_2 = \left\{\frac{n+2}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$;

$A_6 = \{(-1)^n \frac{n+2}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$;

$A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 > 5\}$;

$A_7 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x^2 < 3\}$;

$A_4 = \left\{(-1)^n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$; $A_8 = \{a \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 \neq a \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 8. Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato. Si dimostri che $B = \{-a \mid a \in A\}$ è inferiormente limitato e $\inf B = -\sup A$.

Esercizio 9. Dimostrare che ogni sottoinsieme non vuoto di numeri naturali, $A \subseteq \mathbb{N}$, ha un minimo.

Suggerimento. A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente (0 è un minorante). Si consideri l'estremo inferiore e si dimostri che appartiene ad A .

Esercizio 10. Si consideri il campo ordinato $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ introdotto nell'Esercizio 4. Dato l'elemento $g = \frac{x^2+1}{x-1} \in \mathbb{F}$, si dimostri che $g \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il campo ordinato $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ è archimedeo?