

2 I simboli di sommatoria e produttoria e il principio di induzione

Esercizio 11. Scrivere per esteso le seguenti somme:

$$\sum_{k=0}^6 (-1)^k a_k; \quad \sum_{k=0}^5 (a_k + a_{k+1}).$$

Esercizio 12. Scrivere con il simbolo di sommatoria le seguenti somme:

- $\frac{2^2 - 1}{2} + \frac{3^3 - 2^2}{3^2} + \frac{4^4 - 3^3}{4^3} + \frac{5^5 - 4^4}{5^4};$
- $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{2^2}{3^3}\right) + \dots + \left(1 - \frac{4^4}{5^5}\right);$
- $3 - 7 + 11 - 15 + \dots + (-1)^{n-1} (4n + 3).$

Esercizio 13. Dimostrare le seguenti identità

- $\sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k, \quad \text{con } n < m;$
- $\sum_{k=1}^n (k+1) + \sum_{h=1}^n (1-h) = 2n;$
- $\left(\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i a_j - b_i b_j).$

Esercizio 14. Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Esercizio 15. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2.$$

Esercizio 16. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_{ik} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_{ik}.$$

Esercizio 17. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Esercizio 18. Verificare le seguenti identità:

- $\prod_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n b_j = \prod_{k=1}^n a_k b_k;$
- $\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n b_j \right) a_i = \prod_{i=1}^n a_i b_i^n;$
- $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_i b_j = \prod_{i=1}^n a_i^n b_i^n.$

Esercizio 19. Dimostrare che

$$\prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

Esercizio 20. Dimostrare che

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Esercizio 21. Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=k-1}^{n-1} \binom{r}{k-1}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Suggerimento. Applicare l'induzione su n partendo da $n = k$ e usare l'esercizio precedente.

Esercizio 22. Si ricordi che, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, il coefficiente binomiale $\binom{a}{n}$ può essere definito per ricorsione come

$$\begin{cases} \binom{a}{0} = 1, \\ \binom{a}{n+1} = \binom{a}{n} \frac{a-n}{n+1}. \end{cases}$$

Si dimostri che, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che

$$\binom{a}{n} n! = \prod_{k=0}^{n-1} (a - k).$$

Esercizio 23. Si dimostri che, per ogni numero naturale $n \geq 1$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad \text{per ogni } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 24. Si dimostri che la definizione di potenza ad esponente razionale di base a reale positiva $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ è ben posta (cioè non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza che individua il numero razionale $\frac{m}{n}$), mostrando che, per ogni $n, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$(\sqrt[rn]{a})^{rm} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Esercizio 25. Si dimostri che, dato $a > 1$, $\sup\{a^x \mid x \in \mathbb{R}\} = +\infty$ (cioè l'insieme $\{a^x \mid x \in \mathbb{R}\}$ non è superiormente limitato).

Suggerimento. $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{a^x \mid x \in \mathbb{R}\}$.