Esercizi sui numeri complessi

1. Dato il numero complesso $z = (1 + i\sqrt{3})^5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{13}$

(i) si rappresenti z in forma trigonometrica e in forma esponenziale;

(ii) si rappresenti z nella forma $a + i\,b$;

(iii) si calcolino le radici quinte di z e le si rappresenti sul piano complesso.

2. Dato il numero complesso $z = 16\sqrt{2}\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)^3}$

(i) si scriva z in forma trigonometrica e in forma algebrica;

(ii) si calcolino le radici quadrate di z.

3. Si calcolino le radici terze di $2 - 2i$.

4. Dati i numeri complessi $z = \sqrt{3} - i$ e $w = 4\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}$

(i) li si rappresenti in forma esponenziale;

(ii) si scrivano le forme esponenziali di zw, $\frac{z}{w}$ e $\frac{1}{z}$;

(iii) si calcoli z^3 e lo si scriva in forma algebrica;

(iv) si calcolino le radici terze di w e le si rappresenti sul piano complesso.

5. Dato il numero complesso $z = \frac{(i-1)^{11}}{(i+1)^7}$

(i) si scriva z in forma trigonometrica e in forma algebrica;

(ii) si calcolino le radici terze di z e le si rappresenti sul piano complesso.

6. Si risolvano in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

$$
\begin{array}{rl}
(i) & z^2 + (1-i)z - i = 0; \\
(ii) & z^2 - \bar{z} = 0; \\
(iii) & (1+z)^4 = (1-z)^4; \\
(iv) & \left(\dfrac{2z+1}{2z-1}\right)^4 = 1.
\end{array}
$$

7. Si calcolino le radici seste del numero complesso

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{15}.$$

8. Si disegnino sul piano di Argand-Gauss i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
A &= \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z^2) = 1\}, \\
B &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| < |z-2| \text{ e } \mathrm{Im}\, z < 0\}, \\
C &= \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 1, \ \mathrm{Re}\, z \ge 0 \text{ e } \mathrm{Im}\, z \le (1 - \mathrm{Re}\, z)^3\right\}, \\
D &= \left\{i\, \frac{1-z}{1+z} : \ |z| \le 1\right\}, \\
E &= \left\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\big(z(i-1)\big) \le \mathrm{Re}\big(\bar{z}(5+i)\big)\right\}, \\
F &= \left\{z \in \mathbb{C} : \ 2\,\mathrm{Re}\big(z(1+i)\big) + z\bar{z} \le 2\right\}.
\end{aligned}
$$

9. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Sapendo $z = 2i$ è soluzione dell'equazione $z^3 - 2z^2 + az + b = 0$, si determinino a e b e si trovino le altre soluzioni dell'equazione.

10. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$. Si calcoli

$$|1+z|^2 + |1-z|^2.$$

11. Sia $z \in \mathbb{C}$. Si dimostri che esistono $r \in \mathbb{R}$, $r \ge 0$, e $w \in \mathbb{C}$ con $|w| = 1$ tali che $z = rw$. Per quali $z \in \mathbb{C}$ la scelta di r e w è unica?