Esercizi sulle funzioni

1. Si dimostri che, se $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è inferiormente limitato e $\inf E \notin E$, allora $\inf E$ è un punto di accumulazione per E.

2. Per ciascuno dei seguenti insiemi si determini l'insieme dei punti di accumulazione.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathbb{N} \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\
E_2 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x(x^2-5) > 0\} \cup \mathbb{Z}; \\
E_3 &= \left\{ \frac{n+1}{1+n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \\
E_4 &= \left\{ \cos(n\pi) + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \\
E_5 &= (-3,-2) \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}; \\
E_6 &= (0,1) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}; \\
E_7 &= \left\{ \frac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.
\end{aligned}$$

3. Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_3(\arccos x) < 1.$$

4. Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2\cos x - 1}} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Determinare l'insieme di definizione (dominio naturale) della seguente funzione:

$$\sqrt{\frac{\log_2|2x| - \log_2|x-1|}{2 + \log_2(x+4)}}.$$

6. Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{\log_2(x-2)}{\sqrt{1+\log_2(x-2)}} < 2.$$

7. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 1 & \text{se } x < -3 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 1 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2^{x-2} & \text{se } x > 2, \end{cases}$$

determinarne l'immagine, l'estremo superiore, l'estremo inferiore e il massimo e minimo (se esistono). Determinarne inoltre la controimmagine dell'intervallo $[0,1]$.

8. Data la funzione $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, determinarne l'insieme di definizione (dominio naturale) X e l'immagine $I = f(X)$. In caso $f : X \to I$ risulti invertibile determinarne la funzione inversa specificando anche dominio e immagine della funzione inversa.

9. Si dica se ciascuna delle seguenti informazioni definisce o no una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

(i) $f(x) = \sqrt{x}$.

(ii) $f(x) = \sqrt{x^2}$.

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2 = 3x - 2, \\ 1, & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2 = 2x - 1, \\ 1, & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$

(vi) $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{se } x^2 \leq 2x - 1, \\ 2, & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$

10. Si consideri la funzione $f : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f(x) = \sin x - \pi$. Si stabilisca se f è invertibile e, in caso di risposta affermativa, si determini l'inversa f^{-1}.

11. Si disegni il grafico della funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|.$$

12. Si determinino le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ e se ne disegnino i grafici nei seguenti casi:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = [x]$ (parte intera).

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \{x\}$ (parte frazionaria).

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = [x]$.

(vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \{x\}$.

13.

(i) Si costruisca un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che l'insieme dei suoi punti di massimo sia una semiretta e l'insieme dei suoi punti di minimo sia un intervallo chiuso e limitato.

(ii) Si costruisca un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che l'insieme dei suoi punti di minimo sia un intervallo aperto limitato e l'insieme dei suoi punti di massimo sia un intervallo chiuso e limitato.

(iii) Si costruisca un esempio di funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $\max f = 5$, $\inf f = -1$ e f non abbia punti di minimo.

14. Si consideri la funzione $f\colon[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$. Si disegni il grafico delle seguenti funzioni

$$
\begin{array}{lll}
f_1(x)=f(x)-2, & f_2(x)=f(x-2), & f_3(x)=f(3x),\\
f_4(x)=\frac{3}{2}f(x), & f_5(x)=f\left(\frac{x}{3}\right), & f_6(x)=f(x)+1,\\
f_7(x)=-f(x), & f_8(x)=f(x-1), & f_9(x)=f(-x),\\
f_{10}(x)=1-2f\left(\frac{x+1}{3}\right), & f_{11}(x)=f(1-x), & f_{12}(x)=|f(x)-1|.
\end{array}
$$

individuando per ogni funzione dominio e immagine.

15. Si disegnino i grafici delle funzioni $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g\colon[-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ definite come

$$f(x)=\big||x+1|-1\big|,\quad g(x)=\sup_{-2\le t\le x}f(t).$$

16. Si disegni il grafico delle seguenti funzioni (ciascuna di esse definita sul suo dominio naturale):

$$
\begin{array}{lll}
g_1(x)=(\operatorname{sgn}\circ\operatorname{sgn})(x), & g_2(x)=(2\sin(3x)-1)^-, & g_3(x)=1-\exp(x-2),\\
g_4(x)=(1+\log x)^+, & g_5(x)=\big||x-2|-1\big|, & g_6(x)=[\sin|x|-1],\\
g_7(x)=\cos x+|\cos x|, & g_5(x)=3\cos x-\sqrt{3}\sin x, & g_6(x)=[\frac{x}{2}-1].
\end{array}
$$

17. Di ognuna delle seguenti funzioni, determinare l'insieme di definizione, tracciare un grafico qualitativo, determinare l'immagine, gli estremi superiore ed inferiore specificando se si tratta anche di massimi e minimi.

- $f(x)=|e^x-1|$;
- $f(x)=e^{|x|}-1$;
- $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$;
- $f(x)=|x|^2-5|x|+6$;
- $f(x)=|x|^2+5|x|+6$;
- $f(x)=\ln(x-2)-5$;
- $f(x)=|\ln(x-2)-5|$.