

Esercizi sui limiti di funzioni - I

1. Si dimostri che, se $E \subset \mathbb{R}$ è inferiormente limitato e $\inf E \notin E$, allora $\inf E$ è un punto di accumulazione per E .

Suggerimento. Per assurdo, se $\inf E \notin E$ non fosse un punto di accumulazione per E , esisterebbe $r > 0$ tale che $(\inf E - r, \inf E + r) \cap E = \emptyset$; usando la definizione di $\inf$ si raggiunge un assurdo.

2. Per ciascuno dei seguenti insiemi si determinino l'insieme dei punti di accumulazione e l'insieme dei punti isolati:

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathbb{N} \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ E_2 &= \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 5) > 0\} \cup \mathbb{Z}; \\ E_3 &= \left\{\frac{n+1}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}; \\ E_4 &= \left\{\cos(n\pi) + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}; \\ E_5 &= (-3, -2) \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}; \\ E_6 &= (0, 1) \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}; \\ E_7 &= \left\{\frac{2n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}. \end{aligned}$$

3. Si dimostri che $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)$ non esiste (dove, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $[t]$ indica la parte intera di t).

4. Si verifichi che $0 \cdot (+\infty)$ è una forma indeterminata. In particolare si producano esempi di funzioni f, g tali che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ma il limite del prodotto $f(x)g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ esista finito, non esista, esista infinito rispettivamente.

5. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3} - x), \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\pi - x)^2}{1 + \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos^3 x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(4x)}{\sin(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{4x}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 9}{4x^3 + x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{x^2 + 7x + 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin(\pi x)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x/2)}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x} e^{x \cos(1/x)}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}, \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 + (\cos x)(\sin^3 x)}{\sin(2x) + (\sin^2 x)(\tan x) + x^3}, & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 + (1 - \cos x)^{1/4}}{x^2 + \sqrt{x} + \sin x}, & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1 - \cos x}{x + \tan \sqrt{x}}, \\
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right] & \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{7}{x^3} \right)^{3x^3} \left[\frac{3 \cdot 2^{x^3} + 5 \cos x - 8 + \pi x \tan x^2}{\tan x^2} \right] \\
& \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+x-2} - x^3 + 1}{\sqrt{\sin(x-1)} - \sqrt{x^2-1} - (x^2-3x+2)} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{x-1}{x^3+2}\right) \log_2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)}{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x^3}}} \\
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^{10}(x) + x^5 + e^{3x}}{x^4 + 3e^x + \sqrt{x}}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + (x^4 - 3x)^{1/2}}{(x+2)^4 + 3x^2 - 2x}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+1)e^{\frac{x}{x-1}} - xe].
\end{aligned}$$

Suggerimento. Per calcolare l'ultimo limite può essere utile la sostituzione $t = \frac{1}{x-1}$.

6. Si discuta l'esistenza dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 5} [x] \sin(\pi x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} [1-x][x], \quad \lim_{x \rightarrow 1} [x-1][x], \quad \lim_{x \rightarrow 1} [x]\{x\},$$

dove $[x]$ e $\{x\}$ denotano la parte intera di x e la parte frazionaria di x rispettivamente.