7 Infinitesimi, infiniti e successioni

Esercizio 65. *Si calcoli l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni infinitesime:*

$$\frac{x^3 + \sin(3x^4)}{1 - \cos x}, \qquad \sin x - \tan x, \qquad x^5 \sin^2 x,$$

$$(\sin(x^3) + x^4)^{1/5}, \quad \cos x - (\cos x)^{1/3}, \quad \sqrt{\frac{x^2 + x^3}{x^4 + \cos x}}.$$

Esercizio 66. *Si calcoli l'ordine di infinito dei seguenti infiniti:*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \frac{x^5 + x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 3x - 1} && \text{per } x \to +\infty,\\
&\text{(ii)} && \frac{3x^2 - \sin x}{3\sqrt{x} - 2} && \text{per } x \to +\infty,\\
&\text{(iii)} && x^3 + x^5 \sin(1/x) && \text{per } x \to +\infty,\\
&\text{(iv)} && \frac{2x + 3}{(3x - 1)^{2/3}} && \text{per } x \to \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 67. *Determinare l'ordine di infinitesimo (rispetto a $\frac{1}{x}$), per $x \to +\infty$, al variare del parametro positivo $\alpha > 0$ della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{x^\alpha} - \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^3 + 5x - 2}.$$

Esercizio 68. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che*

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *e* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

(b) $|b_n| < 1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*.*

Quali delle asserzioni seguenti seguono dalle ipotesi (a) e (b)?

(i) Esiste $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $2a_n - b_n > 0$ *per ogni* $n \geq N$*.*

(ii) Esiste $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$*.*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n + b_n}{n+1} = 1$*.*

(iv) Esiste $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $a_n + b_n > 0$ *per ogni* $n \geq N$*.*

Esercizio 69. *Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4+n}-\sqrt{n-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{n^2+n}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\sin n)^{1/n}(2+\sin n)^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^6)}{\arctan n}\log(\cos(n^{-3})),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+7^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-n\sqrt{n-1}\right)\sqrt{n^3+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n+(\sqrt{n})^3}}{n\sqrt[3]{n}-n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n+7}-\sqrt{n^2-n+6}}{5n-2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-4^{n-1}}{3^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!+2^n}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\sqrt{n}}-2^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+2}\right)^{n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!-(n+1)!}{n^2e^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^{1/n}-1)}{\log n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n]{3}\right)n\right], \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3(\sqrt[n]{e}-\sqrt[n]{2})},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n\sin n}{n^2-1}\right)^{-1/3}-1\right]\sqrt{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log((n+2)!)-\log(n!+7)}{\log(6n^8+\sin(n\frac{\pi}{2}))}.$$

Esercizio 70. *Si disegni il grafico della funzione (definita sul suo dominio naturale)*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(1+\sin(\pi x))^n}{1-(1+\sin(\pi x))^n}.$$

Esercizio 71. *Si dica se esistono $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha+\beta n+\frac{n^2+1}{n+1}\right)=0$$

e, in caso di risposta affermativa, li si determini.

Esercizio 72. *Si calcolino limite inferiore (minimo limite) e limite superiore (massimo limite)*

della seguenti successioni:

$$a_n = 3(-1)^{[n/2]} + \frac{(-1)^n}{2n+\sin(n)} \quad \textit{dove } [\cdot] \textit{ denota la funzione parte intera,}$$

$$b_n = 1 - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right),$$

$$c_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right),$$

$$d_n = 2 + \cos(n\pi)\frac{1+2n^2}{(n+1)^2},$$

$$e_n = (-1)^{n+1} + (-1)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

$$f_n = \frac{(-1)^{n-1}-2}{(-1)^n-2}.$$

Esercizio 73. *Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri la seguente successione definita per ricorrenza:*

$$a_0 = \lambda, \quad a_{n+1} = 2a_n - a_n^2 \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1, & \textit{se } \lambda \in (0,2), \\ 0, & \textit{se } \lambda \in \{0,2\}, \\ -\infty, & \textit{se } \lambda \in \mathbb{R}\setminus[0,2]. \end{cases}$$

Suggerimento.

1. *Si dimostri che, se $\lambda \in (0,2)\setminus\{1\}$, allora $0 < a_n < 1$ per ogni $n \geq 1$ e $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.*
2. *Si dimostri che, se $\lambda \in \mathbb{R}\setminus[0,2]$, allora $a_n < 0$ per ogni $n \geq 1$ e $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 1$.*
3. *Si osservi che, se $\lambda = 0, 1, 2$ la successione è definitivamente costante.*