Esercizi vari

1. Dimostrare che $\sqrt{10}$ è irrazionale.

2. Determinare l'estremo inferiore e superiore, precisando se sono pure minimi e massimi, dei seguenti sottoinsiemi reali.

1. $A = \left\{\frac{1}{3n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
2. $B = \left\{x \in \mathbb{R}\colon\ x\,|x| = x^2\right\}$.
3. $C = \left\{\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\colon\ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

3. Sia $S = [-4, 0) \cup [1, 2]$. Determinare estremo inferiore ed estremo superiore, specificando se siano anche minimo e massimo, dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{xyz\colon\ x, y, z \in S\}\,, \\ B &= \left\{\frac{|xy|}{z}\colon\ x, y, z \in S\right\}, \\ C &= \left\{\frac{xy}{z}\colon\ x, y, z \in S\right\}. \end{aligned}$$

4. Calcolare le radici terze di $z = \left(\frac{3+2i}{1+i}\right)^3$.

5. Calcolare le radici quarte di $z = \mathrm{Re}\left(\frac{3-i}{2+i}\right)$.

6. Calcolare le radici quarte di $z = \mathrm{Im}\left(\frac{3-i}{2+i}\right)$.

7. Determinare e disegnare i seguenti insiemi.

1. $A = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}\,(z + \bar{z}) = \mathrm{Re}\,(z^2)\right\}$.
2. $B = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}\ (z(2\bar{z} + z)) = 3\}$.
3. $C = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}\ \left(\frac{1}{z^2}\right) \le 0\right\}$.
4. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon z = -it,\ \exists t \in T\}$ dove T è l'insieme definito da $T = \{t \in \mathbb{C}\colon\ |t - 3 + i| = |t + 2i|\}$.
5. $E = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z|^3 = (\mathrm{Re}\,(z))^3 + (\mathrm{Im}\,(z))^3,\ |z - i| = |z|\right\}$.

8. Risolvere in campo complesso le seguenti equazioni.

1. $z^2 + 3iz + 4 = 0$.
2. $(1 - z)^{10} = (1 + z)^{10}$.
3. $\frac{iz^6+1}{|z|^2+1} = 1$.
4. $\frac{2z^2+\bar{z}}{2i+\bar{z}^2+z} = 1$.

5. $\frac{z^2 - \bar{z}^2}{z^2} = z - \bar{z}$.

6. $z^3 - \bar{z}^3 = \bar{z}$.

7. $\frac{\bar{z} z^4}{1+i} = z(1+i)$.

9. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{C}$ il sistema

$$\begin{cases} (az - b\bar{z})\,(bz - a\bar{z}) = 4 \\ z^2 = |z|^2 \end{cases}$$

ha almeno una soluzione.

10. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $f(x) = e^x + e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, determinare se è iniettiva e/o suriettiva.

11. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, 0]$, tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ -x^2, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

determinare se è iniettiva e/o suriettiva. Calcolare inoltre l'immagine $f(\mathbb{R})$.

12. Si consideri la funzione $f(x) = \exp(|x|)$ definita per ogni $x \in (-1, 0] \cup [1, +\infty)$. Determinare se f è invertibile e in tal caso determinare la funzione inversa.

13. Determinare i punti di continuità della funzione

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{array}$$

14. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1. Dimostrare che f è continua nel punto $x = 0$.
2. Dimostrare o confutare: f è continua in un intorno di 0.

15. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^4 + x} - \sqrt{x - 1} \right)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \sqrt{x^2 + x}}$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{\sqrt{x}} - 2^x \right)$.