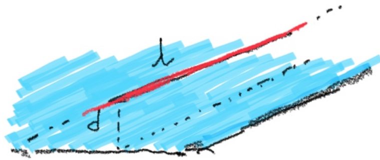
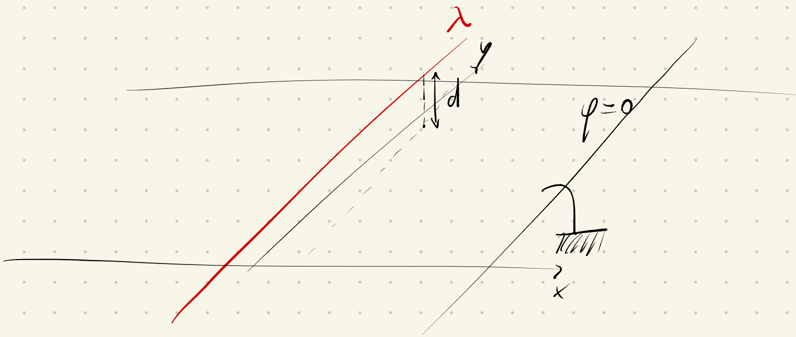
Problema 7: Un filo infinito con densità di carica per unità di lunghezza λ corre parallelo ad un piano conduttore, a distanza d da esso. Il piano è a massa ($\varphi = 0$).

a) Trovare il potenziale elettrostatico.
b) Trovare la densità di carica areica indotta sul piano conduttore.



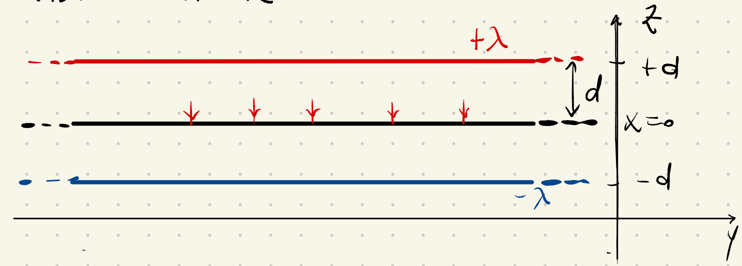


• Come posso trovare φ?

→ Per integrazione diretta è difficile (Non conosco le σ_{IND})

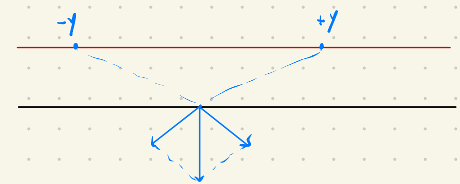
→ Provo a ricondurmi ad un problema noto

Vista di fronte



• Il problema ha una simmetria traslazionale

→ Il campo deve essere lo stesso ovunque <u>SOTTO</u> al filo, così come in punti con x opposta e stessa y



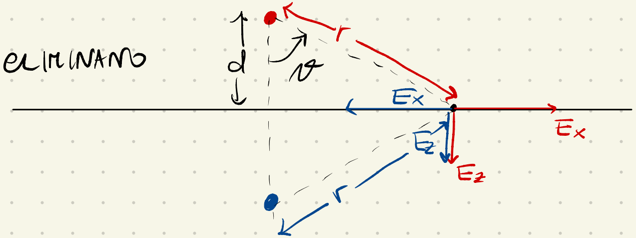
• Come capisco se ho scelto una configurazione opportuna per le cariche immagine?

↳ Il PIANO deve essere EQUIPOTENZIALE ⇒ I campi TANGENTI si devono annullare

FILO ROSSO $E_r(x, z=0) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{d^2+x^2}}$ r

$$\begin{cases} E_x(x) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \sin\vartheta \\ E_z(x) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cos\vartheta \end{cases}$$

SI ELIMINANO



FILO BLU $E_r(x, z=0) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{d^2+x^2}}$

$$\begin{cases} E_x(x) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \sin\vartheta \\ E_z(x) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cos\vartheta \end{cases}$$

• In totale: $E(x, z=0) = \dfrac{-2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{d^2+x^2}} \cos\vartheta = -\dfrac{\lambda d}{2\pi\varepsilon_0 (d^2+x^2)}$

$\cos\vartheta \to \dfrac{d}{\sqrt{d^2+x^2}}$

I campi tangenti si eliminano! → $z=0$ è SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE! → Ho scelto la giusta configurazione di cariche immagine. ✓

Oss e se avessi scelto $\lambda^{blu} \neq -\lambda^{red}$?

Non mi si sarebbero annullate le comp. tangenziali di E

↓

No equipot!

• Scrittura del potenziale

$$\varphi(x,z) = \varphi_{RED}(x,z) + \varphi_{BLUE}(x,z)$$

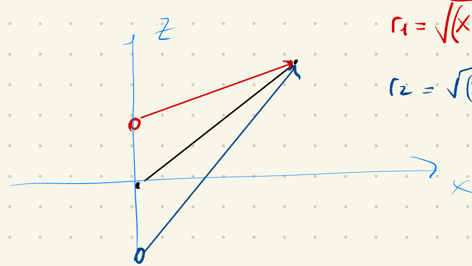
DISTANZA RADIALE dal FILO

Per un filo infinito $\varphi(r) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{r}{r_0}\right)$, dove $r_0 \rightarrow$ punto in cui $\varphi(r_0) = 0$

↳ Posso scegliere $r_0 = d$ per entrambi i fili $\rightarrow \varphi_R = \varphi_B = 0$ in $x=0, z=0$

• A questo punto posso calcolare φ in TUTTO lo SPAZIO!

$$\varphi_{RED}(x,z) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+(z-d)^2}}{d}\right)$$



$r_1 = \sqrt{(x-0)^2+(z-d)^2}$

$r_2 = \sqrt{(x-0)^2+(z+d)^2}$

$$\varphi_{BLU}(x,z) = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+(z+d)^2}}{d}\right)$$

$$\varphi_{TOT}(x,y) = \varphi_R + \varphi_B = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+(z+d)^2}}{\sqrt{x^2+(z-d)^2}}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{x^2+(z+d)^2}{x^2+(z-d)^2}\right)$$

b) CARICA INDOTTA

→ Se conosco il CAMPO nei pressi del CONDUTTORE $\rightarrow \Delta E_\perp = \frac{\sigma_{IND}}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_{IND} =$

Quanto vale $\Delta E_\perp$? Posso calcolare $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} =$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cancel{x^2+(z-d)^2}}{x^2+(z+d)^2}\cdot\frac{2(z+d)[x^2+(z-d)^2] - [x^2+(z+d)^2]2(z-d)}{(x^2+(z-d)^2)^{\cancel{2}}}$$

Valuto in zero $\longleftarrow = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{x^2+d^2} \cdot \dfrac{2d\,x^2 - (x^2+d^2)(-2d)}{x^2+d^2} =$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2dx^2 + 4dx^2 + 2d^3}{(x^2+d^2)^2}$$

$$E_z(z=0) = -\vec{\nabla}\varphi\Big|_{z=0} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\log\left(x^2+(z+d)^2\right) - \log\left(x^2+(z-d)^2\right)\right)\right]\Big|_{z=0} =$$

$$= +\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2+(\cancel{z}+d)^2} \cdot 2(\cancel{z}+d) - \frac{1}{x^2+(\cancel{z}-d)^2} \cdot 2(\cancel{z}-d)\right]\Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2d}{x^2+d^2} + \frac{2d}{x^2+d^2}\right] = \frac{\cancel{4}d\lambda}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+d^2} = \frac{d\lambda}{\pi\varepsilon_0(x^2+d^2)}$$

· Come si relaziona alla σ_{IND}? Ho un conduttore con $\Delta E_z = E_z|_{z=0} \longrightarrow$ Deve essere $\Delta E_z = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

↳ $\sigma = \varepsilon_0 \Delta E_z = \varepsilon_0 E_z|_{z=0} = \dfrac{d\lambda}{\pi(x^2+d^2)}$

check: $\displaystyle\int \sigma\, dA = Q_{FILO} \rightarrow \int_0^L dy \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \sigma}_{1} = \int_0^L dy\, \lambda$

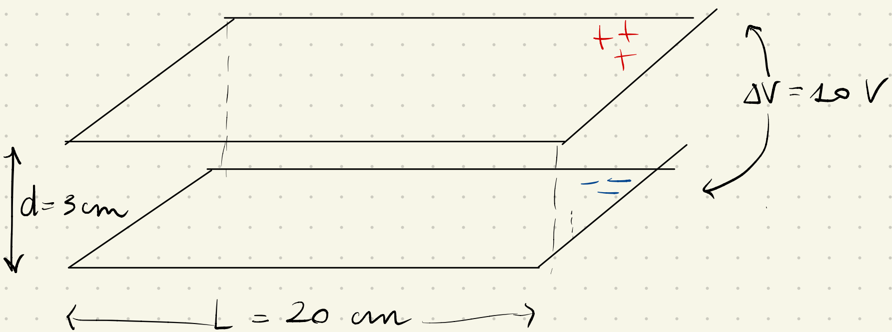
$$① = \frac{d\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{x^2+d^2} = \frac{\cancel{d}\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{d^{\cancel{2}}(1+x^2/d^2)} = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \overbrace{\frac{1}{d}}^{=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{d}\right)} \frac{1}{1+\frac{x^2}{d^2}} = \frac{\lambda}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{d}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi}\left[\pi/2 + \pi/2\right] = \frac{\lambda}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi}$$

✓ CORRETTO

3.70 *Force and energy for two plates* **

Calculate the electrical force that acts on one plate of a parallel-plate capacitor. The potential difference between the plates is 10 volts, and the plates are squares 20 cm on a side with a separation of 3 cm. If the plates are insulated so the charge cannot change, how much external work could be done by letting the plates come together? Does this equal the energy that was initially stored in the electric field?



CAPACITÀ CONDENSATORE

↓

CARICA SUI PIATTI per ogni VOLT di ΔV

CONDENSATORE a PIATTI PIANI:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

- Ragioniamo in termini di energia: ENERGIA del CONDENSATORE: $U_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV$

Campo nel condensatore: $E \simeq \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \rightarrow U_{el} = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0} \int_0^d \int_{\text{QUADRATO}} da \, \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{dA}{\varepsilon_0} =$

$$= \frac{1}{2}\frac{d \cdot \cancel{A}}{\varepsilon_0}\frac{Q^2}{A^{\cancel{2}}} = \frac{Q^2 d}{2A\varepsilon_0} = \frac{C^2 \Delta V^2 d}{2A\varepsilon_0} =$$

$Q = C\Delta V$

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

$$= \frac{\varepsilon_0^{\cancel{2}} A^{\cancel{2}}}{d^{\cancel{2}}} \frac{\Delta V^2 \cancel{d}}{2\cancel{A}\cancel{\varepsilon_0}} = \Delta V^2 \frac{A\varepsilon_0}{2d} = \frac{1}{2}C\Delta V^2$$

- Lascio liberi i piatti senza possibilità di flusso di CARICA
  ↳ ΔV cambierà, ma Q rimarrà la stessa

STATO INIZIALE: $E = U_{el} = \frac{A}{2d}\varepsilon_0 \Delta V^2$

STATO FINALE: solo energia CINETICA

LAVORO? Un piatto lavora sull'altro e si muove di $\frac{d}{2}$

Qual è la forza che agisce su un piatto? Il piatto NON esercita forza su sé stesso → è immerso nel campo dell'altro → $E_{SINGOLO} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ → su una superficie dA: $dF = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma dA = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dA$ (1)

$dq = \sigma dA$

Quindi la forza sul piatto é $F = \int_A dA \frac{dF}{dA} = A \cdot \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

$W = -\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

La forza é sempre equiversa allo spostamento $\rightarrow$ $W < 0$ per entrambi i piatti

Inoltre, il modulo della forza é costante durante lo spostamento

$$W = W_1 + W_2 = \left(-\frac{d}{\cancel{2}} \cdot \frac{A\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right) \cdot \cancel{2} = -\frac{dA\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$ 2

$\rightarrow$ Effettivamente coincide con 1