Esercizi su continuità, uniforme continuità e lipschitzianità

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esistano finiti. Si dimostri che f è limitata.

2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si dimostri che f ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

3. Sia $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ continua in $x = 0$ e tale che $f(x) = f(x^2)$ per ogni $x \in (-1,1)$. Si dimostri che f è costante.

4. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$. Si dimostri che, se f e g sono lipschitziane, allora $g \circ f$ è lipschitziana.

5. Si dimostri che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato e $f : A \to \mathbb{R}$ è lipschitziana, allora f è limitata.

6. Siano f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando opportunamente le risposte (per giustificare la falsità di un'affermazione si richiede di esibire un opportuno controesempio; per giustificare la validità di un'affermazione si richiede di dimostrarla facendo eventualmente riferimento a teoremi noti):

(i) Se f e g sono lipschitziane, allora $f + g$ è lipschitziana.

(ii) Se f e g sono lipschitziane, allora fg è lipschitziana.

(iii) Se f è lipschitziana e derivabile, allora f' è limitata.

(iv) Se f è derivabile e f' è limitata, allora f è lipschitziana.

(v) Se f è lipschitziana e limitata, allora f^2 è lipschitziana.

7. Per ciascuna delle seguenti funzioni, si dica se è uniformemente continua e/o lipschitziana sul suo dominio:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x + \arctan(x),$$

$$f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = e^{\sqrt{|x|}},$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sin(x^2),$$

(**Suggerimento:** si considerino $f_3\left(\sqrt{k\pi}\right)$ e $f_3\left(\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$ per k grande)

$$f_4 : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & \text{se } x \in (0,1], \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

(**Suggerimento:** si considerino $f_4\left(\frac{1}{k\pi}\right)$ e $f_4\left(\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$ per k grande, oppure si calcoli la derivata nei punti $\frac{1}{2k\pi}$)

$$f_5 : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) = \sqrt{1 - \cos x}.$$

8. Si dimostri che, se $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua, allora esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Suggerimento.

- Mostrare che, data una successione a_n tale che:
  - $a_n > 0$;
  - $a_n \to 0$ per $n \to \infty$;

  allora la successione $c_n = f(a_n)$ è di Cauchy.
- Mostrare che date due successioni a_n, b_n tali che:
  - a_n, $b_n > 0$;
  - a_n, $b_n \to 0$, per $n \to \infty$;
  - $f(a_n) \to L_1$, $f(b_n) \to L_2$ per $n \to \infty$;

  allora $L_1 = L_2$.
- Usare il teorema ponte.